교육과학기술부 검정
2009. 7. 31.

고 등 학 교

미적분과 통계 기본 익힘책

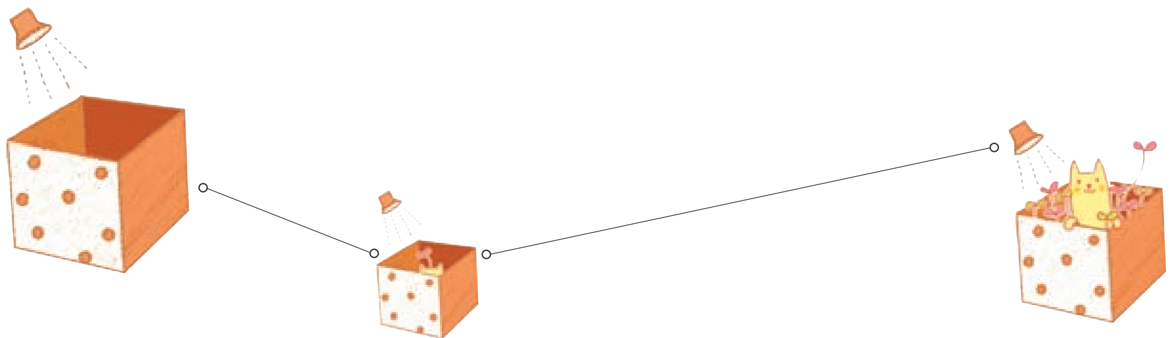
이강섭 | 왕규채 | 송교식 | 양인웅



(주)지학사

들 어 가 는 말

학습은 배우고(學) 익히는(習) 것입니다. 모든 교과가 그렇지만 특히, 수학 학습에서는 익힘이 중요합니다. 그동안 우리의 수학 교육에서는 익힘보다는 배움을 위주로 하였습니다. 학습자 개개인의 차이가 있음에도 불구하고 단일 수업의 가르침과 배움만이 있었습니다. 그러나 다행스럽게도 개정 교육과정에서는 배움과 익힘의 양 날개로 효율적인 수학 학습의 토대를 마련하였습니다.



이 익힘책은 교과서 본 책에서 배운 수학적 지식과 기능을 학습자의 수준에 따라 스스로 익혀, 자연과 사회의 여러 가지 현상을 수학적으로 고찰하고 주어진 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기르도록 저술하였습니다.

이를 위하여 각 소단원별로 바탕 다지기, 기본 익히기, 실력 키우기의 문제를 제공하여 수준별 자기 주도적 학습이 가능하도록 하였습니다. 또, 흥미롭고도 효율적인 학습을 위하여 읽기 자료, 공학 도구, 프로젝트, 실생활 문제 해결하기, 실생활 이야기, 수학자 이야기 등을 곳곳에 수록하였습니다. 반복 연습 또는 문제 풀이가 지루하다고 느낄 때, 이러한 코너에서 시원함을 느끼고 새로운 시야를 확보하기 바랍니다.

수영 선수는 1초를 단축하기 위하여 수천, 수만 시간을 훈련합니다. 피겨 스케이팅 선수도 몇 분간의 연기를 위하여 수천, 수만 시간을 얼음판 위에서 보냅니다. 사진작가는 단 한 장면을 포착하기 위하여 수천 장의 필름을 사용합니다. 화가의 한 작품 뒤에는 수천 장의 데생과 수없는 불면의 밤이 있습니다. 아무런 연습 없이, 끊임없는 익힘 없이 소정의 성과를 거둘 수는 없습니다. 이것은 수학 학습에서도 마찬가지입니다.

이 책으로 수학을 학습하는 여러분이 모두 수학자가 되기를 원하지는 않습니다. 여러분의 대다수는 수학 이외의 분야로 진학하고 진출할 것입니다. 그러나 여러분이 어떤 분야를 선택하더라도 수학 학습에서 배우고 익힌 것은 여러분의 발전의 토대가 될 것이고, 앞날의 등대가 될 것입니다. 이 책을 통하여 여러분의 사고력과 문제 해결력, 창의력을 증진시켜 행복한 삶을 누리기 바랍니다.

지은이 씀

차 례 CONTENTS

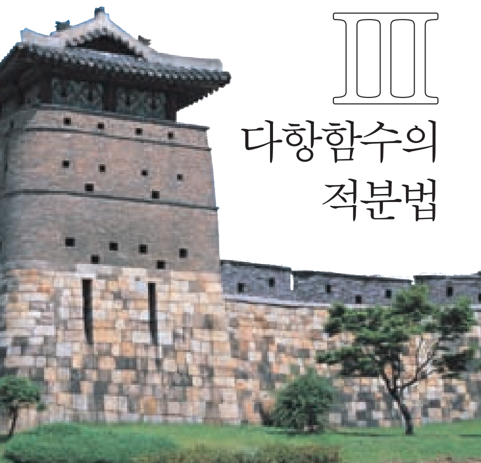
I 함수의 극한과 연속



II 다항함수의 미분법



III 다항함수의 적분법



Ⅳ 확률



Ⅴ 통계



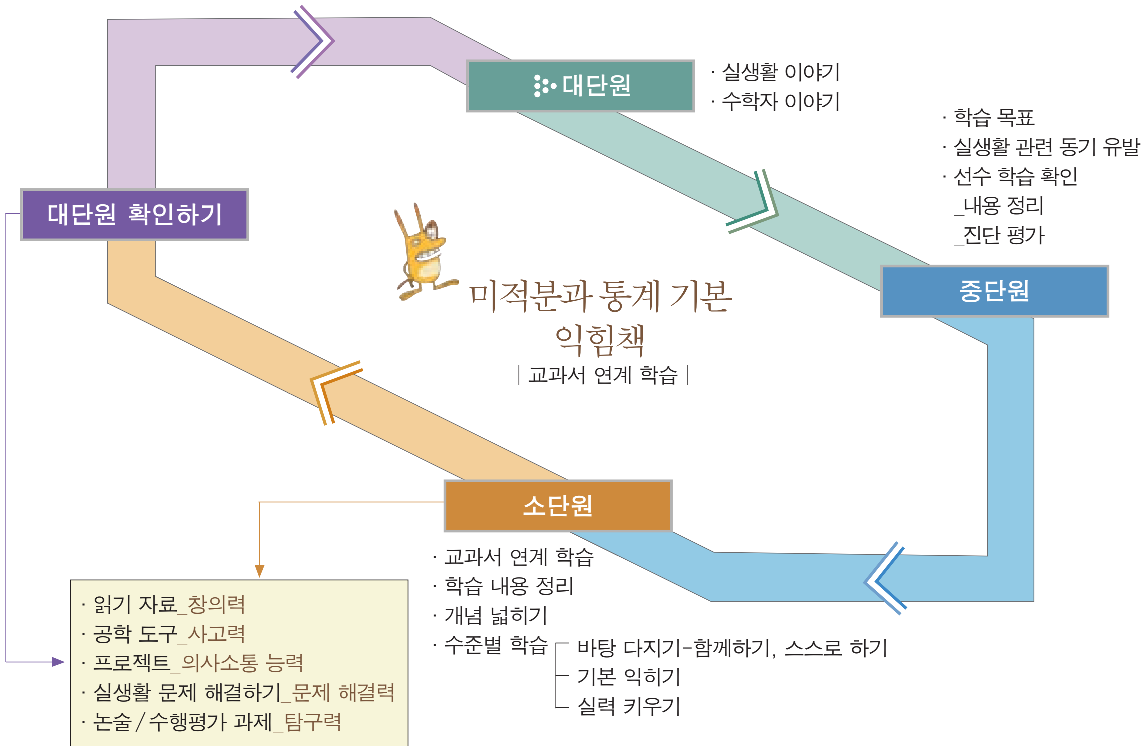




부록*

이 책의 구성

이 책은 2007년 개정 교육과정의 정신을 반영하여, 학생들의 적성과 능력에 맞추어 자기 주도적 학습에 적합하도록 구성하였다. 특히, 교과서와의 연계를 긴밀히 하여 다양한 형태의 학습이 가능하도록 하였으며, 학습자의 사고력, 창의력, 의사소통 능력을 기를 수 있도록 쉽고 재미있게 구성하였다.



| 단원 도입 및 선수 학습 |

실생활 이야기

학습의 실마리가 되는 생활 소재를 만화 및 사진으로 구성하여 학습 주제에 쉽고 재미있게 다가서도록 하였다.



수학자 이야기

대단원 학습에 관련된 수학자의 업적과 일화를 소개하여 학습의 흥미를 높이도록 하였다.

극한의 개념을 엄밀하게 정의한 바이어슈트라스
_Weierstrass, K. T. W. ; 1815~1897

바이어슈트라스는 1874년에 도함수가 없는 연속함수, 달리 말하면 모든 점에서 접선이 존재하지 않는 연속 곡선의 예를 발표하여, 기하학적 직관에 의존하는 해석학 연구에 치명적인 일침을 가했다.

당시까지 연속성과 미분가능성에 대한 개념은 실수 체계에 대한 간단하고도 직관적인 기하학적 극한 이론에 근거하였다. 그러나 바이어슈트라스의 예를 통한 극한, 연속성, 미분가능성의 이론은 당시까지 생각하였던 실수 체계의 성질보다 더욱 심오한 성질에 근거하여 규명되어야 한다는 사실을 분명히 했으며, 코시(Cauchy, A. L. ; 1789~1857)가 해석학에 대한 기초를 다지는

~에 들어가기 전에

중단원 학습에 필요한 선수 학습의 내용 정리와 함께 진단 평가 문항을 제시하였다.

함수의 극한에 들어가기 전에

1. 수열의 극한
무한수열 $\{a_n\}$이 α에 수렴하면 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$와 같이 나타낸다.
또 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, 이 수열은 발산한다고 한다.

2. 수열의 극한에 대한 기본 성질
두 무한수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때
① $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha+\beta$
② $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha-\beta$

1 다음 수열의 수렴 또는 발산을 조사하여라.
(1) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$
(2) $\left\{2+\frac{1}{n}\right\}$
(3) $\{1+(-1)^n\}$
(4) $\{n^2+1\}$

2 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}b_n=3$일 때, 다음 극한값을 구하여라.
(1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)$
(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n}$

| 교과서와 연계된 학습 |

학습 내용 정리_교과서에서 익힌 학습 내용을 정리하였으며, □ 채우기를 통하여 보다 효율적으로 습득하도록 하였다.
내용 정리가 부족한 학생은 개념을 다시 확인할 수 있도록 교과서와 연계하였다.

개념 넓히기_교과서에서 다룬 개념, 방법 등을 깊이 있게 설명하고 사고력을 넓혀 심화 학습이 가능하도록 하였다.

| 자기 주도적 학습 방법 |

바탕 다지기_함께하기(예제)와 스스로 하기(유제)를 제시하여 기초적인 학습 내용을 확인하도록 하였으며 보충 학습이 가능하도록 하였다.

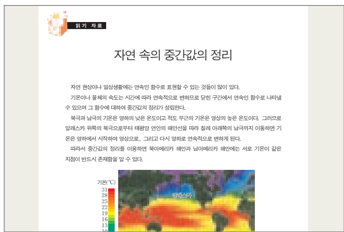
기본 익히기_기본적인 학습 내용을 확인하는 문제를 제시하였으며 오류 유형을 소개하였다.

실력 키우기_학습 내용을 응용, 활용할 수 있는 문제를 제시하여 심화 학습이 가능하도록 하였으며, 또 오류 유형을 소개하였다.

| 수학적 가치 함양 |

읽기 자료

단원과 관련된 상식을 소개하여 수학 학습의 흥미를 높일 수 있도록 하였다.


읽기 자료

자연 속의 중간값의 정리

공학 도구

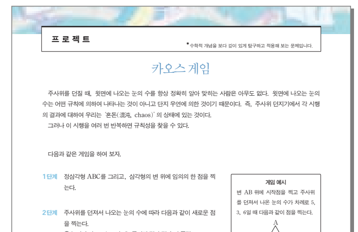
계산기, 컴퓨터 프로그램 및 인터넷을 활용하여 수학적 사고력 향상에 도움이 되도록 하였다.


공학 도구

컴퓨터로 함수의 접선 그리기

프로젝트

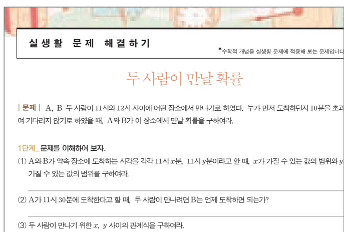
수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용하는 문제로서, 다양한 방법으로 학습 내용을 활용할 수 있도록 하였다.


프로젝트

카오스 게임

실생활 문제 해결하기

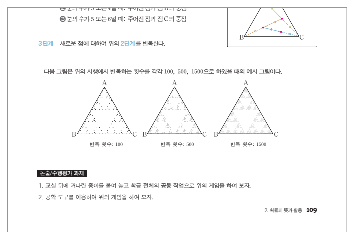
문제 해결 전략을 활용하여 실생활의 문제 해결력을 기르도록 하였다.


실생활 문제 해결하기

두 사람이 만날 확률

논술/수행평가 과제

학습 내용을 바탕으로 여러 가지 문제 해결 상황을 제시하고 해결해 보도록 하였다.


논술/수행평가 과제



| 학습 평가 |

대단원 확인하기

대단원 학습의 마무리로써 문항별로 난이도와 계산, 이해, 추론 등의 수학적 능력 항목을 제시하여 학습 전략을 스스로 찾아가도록 하였다.

 계산기를 활용할 수 있는 문제이다.





함수의 극한과 연속

지구와 달의 운동은 연속적이며 그 과정을 분석하면 일식이나 월식을 예측할 수 있다.

하지만 생물의 진화 과정 중에는 연속적이고 예측할 수 있는 경우도 있고

돌연변이와 같이 전혀 예측할 수 없는 경우도 있다.

이제 이러한 상황을 설명할 수 있는 수학적 도구에 대하여 알아보자.





극한의 개념을 엄밀하게 정의한 바이어슈트라스

_Weierstrass, K. T. W. ; 1815~1897



바이어슈트라스는 1874년에 도함수가 없는 연속함수, 달리 말하면 모든 점에서 접선이 존재하지 않는 연속 곡선의 예를 발표하여, 기하학적 직관에 의존하는 해석학 연구에 치명적인 일침을 가했다.

당시까지 연속성과 미분가능성에 대한 개념은 실수 체계에 대한 간단하고도 직관적인 기하학적 극한 이론에 근거하였다. 그러나 바이어슈트라스의 예를 통한 극한, 연속성, 미분가능성의 이론은 당시까지 생각하였던 실수 체계의 성질보다 더욱 심오한 성질에 근거하여 규명되어야 한다는 사실을 분명히 했으며, 코시(Cauchy, A. L. ; 1789～1857)가 해석학에 대한 기초를 다지는 과정에서 진정으로 어려운 문제에는 접근하지 못했었다는 사실도 밝혔다.

이에 따라 바이어슈트라스는 먼저 실수 체계를 엄밀하게 전개하고 그 다음에 해석학의 모든 기초적인 개념을 실수 체계로부터 유도하자는 계획인 '해석학의 산술화(arithmetization of analysis)' 를 주장하였다.

1 함수의 극한

학습 목표
- 함수의 극한의 뜻을 안다.
- 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.

1. 함수의 수렴과 발산　　2. 극한값의 계산

화학 실험에서 어떤 두 물질을 섞으면 처음에는 서로 불안정한 상태에서 반응하다가 시간이 흐르면 안정된 상태가 된다.

생태계는 시간이 지남에 따라 일반적으로 생산자, 소비자, 분해자의 먹이 사슬이 균형을 이루어 생물의 종류와 수가 어느 일정한 값으로 유지된다. 그러나 가뭄, 홍수, 화산 폭발, 지진 등과 같은 천재지변이나 해양 오염, 대기 오염, 토양 오염 등과 같은 인간에 의한 환경 오염으로 인하여 생태계의 평형 상태가 깨지기도 한다.

자연 재해로 깨진 평형 상태는 비가 오거나 햇볕을 받는 등 시간이 지나면 다시 회복될 수 있으나, 인간에 의한 환경 오염은 매우 긴 시간이 지나도 회복되기 어렵다.






함수의 극한에 들어가기 전에

1. 수열의 극한

무한수열 $\{a_n\}$이 α에 수렴하면 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$와 같이 나타낸다.

또 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, 이 수열은 발산한다고 한다.

1 다음 수열의 수렴 또는 발산을 조사하여라.

(1) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(2) $\left\{2+\frac{1}{n}\right\}$

(3) $\{1+(-1)^n\}$

(4) $\{n^2+1\}$

2. 수열의 극한에 대한 기본 성질

두 무한수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

① $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

② $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

③ $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n=k\alpha$ (단, k는 상수)

④ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

2 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=3$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n}$

3. 수열의 극한값의 계산

두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$일 때, 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, $\{a_n-b_n\}$의 수렴, 발산은 주어진 수열을 적당히 변형한 후, 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 그 극한값을 구할 수 있다.

3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3}{2^n+1}$

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

(4) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

4. 수열의 극한값의 대소 관계

수렴하는 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

① 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\leq b_n$이면 $\alpha\leq\beta$이다.

② 무한수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\leq c_n\leq b_n$을 만족하고 $\alpha=\beta$이면, 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

4 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$1-\frac{2}{n}\leq a_n\leq1+\frac{2}{n}$$

일 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구하여라.

1. 함수의 수렴과 발산

* □ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

함수의 수렴

함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 (1) ______ 한다고 한다. 이때, α를 $x \longrightarrow a$일 때, $f(x)$의 (2) ______ 또는 극한이라고 한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

함수의 발산

① 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 $f(x)$는 양의 무한대로 (3) ______ 한다고 한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

② 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 $f(x)$는 음의 무한대로 (4) ______ 한다고 한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

$x \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow -\infty$일 때, 함수의 극한

① 함수 $f(x)$에서 $x \longrightarrow \infty$일 때, $f(x) \longrightarrow \alpha$이면 $\lim_{x \to \infty} f(x) =$ (5) ______ 와 같이 나타낸다.

② 함수 $f(x)$에서 $x \longrightarrow -\infty$일 때, $f(x) \longrightarrow \alpha$이면 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$와 같이 나타낸다.

좌극한과 우극한

① 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 $f(x)$의 좌극한이라고 한다.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$$

② 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서의 $f(x)$의 우극한이라고 한다.

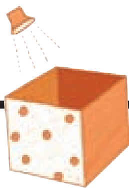
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \beta$$

③ $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) =$ (6) ______



···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 12～19쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 수렴 (2) 극한값 (3) 발산 (4) 발산 (5) α (6) α

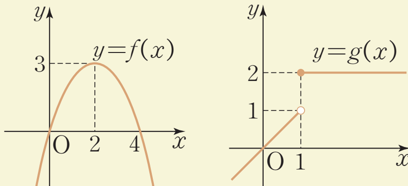


바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 극한값을 구하여라.



(1) $\lim_{x \to 2} f(x)$ (2) $\lim_{x \to 1+0} g(x)$

(3) $\lim_{x \to 1-0} g(x)$

〔풀이〕

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x가 2와 다른 값을 가지면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x)=3$

(2) 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 x가 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.

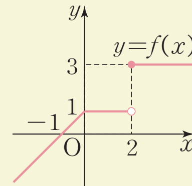
$\therefore \lim_{x \to 1+0} g(x)=2$

(3) 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 x가 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x \to 1-0} g(x)=1$

| 스스로 하기 |

1. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 극한값을 구하여라.



(1) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (2) $\lim_{x \to 2+0} f(x)$

(3) $\lim_{x \to 2-0} f(x)$

〔풀이〕

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x가 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 □에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)=$ □

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x가 2보다 큰 값을 가지면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 □에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x \to 2+0} f(x)=$ □

(3) 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x가 2보다 작은 값을 가지면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 □에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x \to 2-0} f(x)=$ □

교과서 14쪽

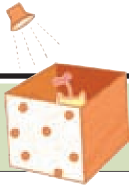
1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to -1} (2x-3)$ (2) $\lim_{x \to 0} (|x|+3)$

교과서 15, 18쪽

2 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x+2}$ (2) $\lim_{x \to -2} \frac{1}{x+2}$



기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{2(x-3)}$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)$ (4) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{5-x}$

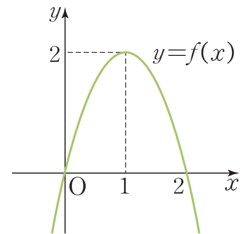
$|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$

2 함수 $f(x)=\frac{x+2|x|+3}{2x+|x|+1}$일 때, 다음 중 수렴하는 것을 모두 골라라.

ㄱ. $\lim_{x\to 1}f(x)$	ㄴ. $\lim_{x\to -1}f(x)$
ㄷ. $\lim_{x\to\infty}f(x)$	ㄹ. $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

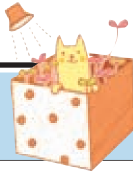
3 $a>3$일 때, 극한값 $\lim_{x\to 2}\frac{|x-a|-(a-2)}{x-2}$를 구하여라.

4 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 극한값 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+1\}$을 구하여라.



$\lim_{x\to 3}f(x)$가 존재
$\Longleftrightarrow \lim_{x\to 3+0}f(x)=\lim_{x\to 3-0}f(x)$

5 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{|x-3|} & (x>3) \\ a & (x\leq 3)\end{cases}$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to 3}f(x)$가 존재할 때, 상수 a의 값을 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 함수 $f(x)=x|x^2-1|$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$을 구하여라.

2 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{|x-2|}$　　(2) $\lim_{x\to -2}\frac{|x^2-4|}{x+2}$

$-2\le x<-1$일 때, $[x]=-2$
$-3\le x<-2$일 때, $[x]=-3$

3 다음 극한값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $\lim_{x\to -2+0}(x+[x])$　　(2) $\lim_{x\to -2-0}(x+[x])$

4 함수 $f(x)=[x]^2+a[x]$에 대하여 등식

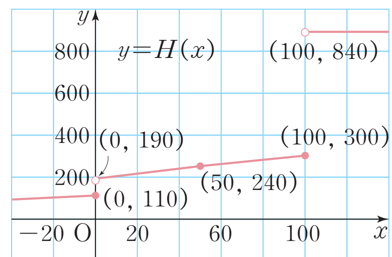
$$\lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}f(x)$$

가 성립할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)



5 오른쪽 그래프는 온도 x ℃에서의 물의 열 함량을 나타내는 엔탈피 함수 $H(x)$ cal/g을 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여라.



(1) 극한값 $\lim_{x\to 100+0}H(x)$를 구하여라.

(2) 극한값 $\lim_{x\to 100-0}H(x)$를 구하여라.

(3) 극한 $\lim_{x\to 0}H(x)$를 조사하여라.

2. 극한값의 계산

* $\square$ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

① $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

② $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\alpha+\beta$

③ $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=$ (1) $\square$

④ $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=$ (2) $\square$

⑤ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq 0$, $\beta\neq 0$)

함수의 극한값의 계산

① 극한 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$일 때에는 인수분해 또는 유리화를 이용하여 주어진 식을 변형한 다음 극한값을 구한다.

② 극한 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}$에서 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이고 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$일 때에는 주어진 식을 변형하여 극한값을 구한다.

함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$이고 $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$일 때, a에 가까운 모든 x에 대하여

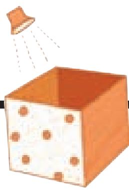
① $f(x)\leq g(x)$이면 $\alpha\leq\beta$이다.

② $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=$ (3) $\square$ 이다.



··· 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 20~25쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $\alpha-\beta$ (2) $\alpha\beta$ (3) α



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

〔풀이〕

(1) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+2)$

$=1+2=3$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

$=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$

| 스스로 하기 |

1. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$ (2) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

〔풀이〕

(1) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-\square)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x-\square)$

$=2-\square=\square$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)-\square}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\square}{\sqrt{x+3}+2}$

$=\frac{\square}{\sqrt{4}+2}=\frac{\square}{4}$

교과서 21쪽

1 $\lim_{x\to a}f(x)=2$이고 $\lim_{x\to a}g(x)=-4$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

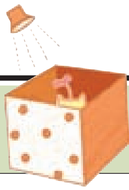
(1) $\lim_{x\to a}\{2f(x)+g(x)\}$ (2) $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$

교과서 21, 22, 23쪽

2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to3}(x^2+3x)$ (2) $\lim_{x\to1}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$

(3) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$ (4) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$



기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{x}$　　(2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+9x-10}{x^2-1}$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$　　(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

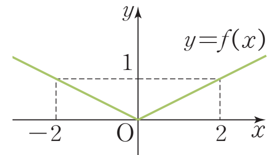
$\frac{\infty}{\infty}$꼴, $\infty-\infty$꼴

2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^2}{1+3x^2}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-x)$

$\lim_{x\to 2}f(x)=1$
$\lim_{x\to -2}f(x)=1$

3 오른쪽 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 다음의 극한값이 존재하는지 알아보고, 존재하면 그 극한값을 구하여라.



(1) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x+2}$　　(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)}$

(3) $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}$　　(4) $\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x+2}$

함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

4 다음 극한값을 구하여라.

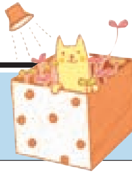
(1) $\lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\lim_{x\to 0}(x^2+2x)\cos\frac{1}{x}$



5 어느 공장에서 배출되는 오염 물질을 x % 제거하는 데 드는 비용을 $f(x)$만 원이라고 하면

$$f(x)=\frac{6000x}{100-x}\ (0\le x\le 100)$$

의 관계식이 성립한다. 이때, 극한값 $\lim_{x\to 50}f(x)$를 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x+2}-1\right)$　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$　　(4) $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2}-4}$



2 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$일 때, 극한값 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+xf(x)}{x^2-f(x)}$를 구하여라.

3 다음 등식이 성립하도록 두 상수 a, b의 값을 정하여라.

(1) $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+ax+b}{x+1}=5$　　(2) $\lim_{x\to 4}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=1$

$f(x)=(x+1)(x-1)g(x)$에서 $g(x)$의 차수를 생각한다.

4 다음 두 조건을 만족하는 다항함수 중 차수가 가장 낮은 다항함수 $f(x)$를 구하여라.

Ⅰ. $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=8$　　Ⅱ. $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=-8$

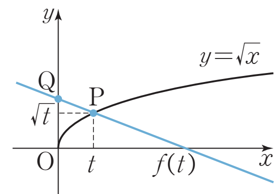
$x-1$은 $x=1$의 좌우에서 부호가 바뀌므로 $x>1$, $x<1$인 경우로 나누어 극한값을 구해야 한다.

5 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$2x^3-6x^2+4x\le f(x)\le x^4-2x^3+1$$

을 만족할 때, 극한값 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$를 구하여라.

6 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$에 대하여 점 Q를 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$가 되도록 y축의 양의 방향에 잡는다. 직선 PQ의 x절편을 $f(t)$라고 할 때, 극한값 $\lim_{t\to 0}f(t)$를 구하여라.



2 함수의 연속

학습 목표

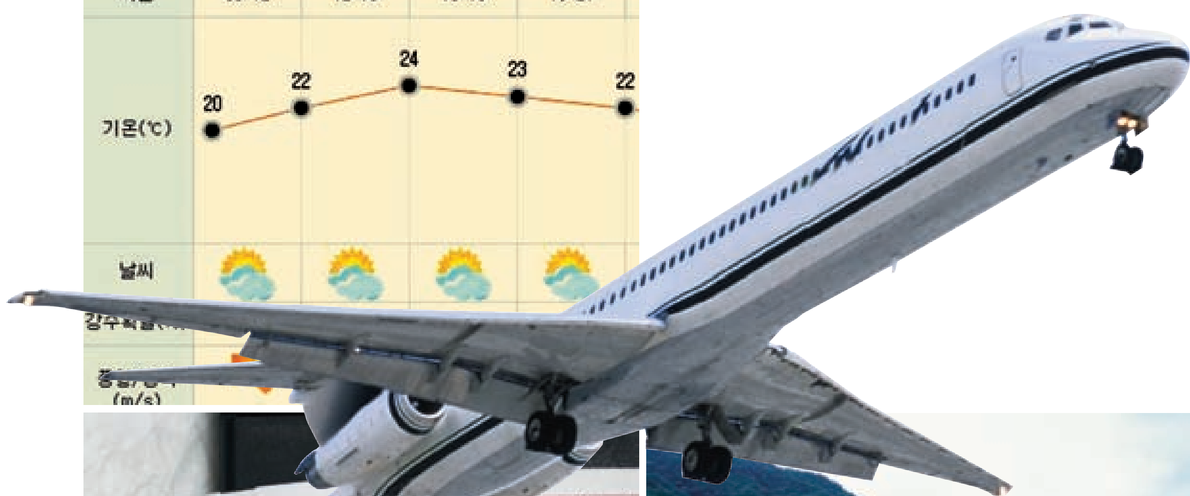
- 함수의 연속의 뜻을 안다.
- 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

1. 함수의 연속

어느 지역의 하루 동안의 기온을 관찰하여 보니 새벽에 낮은 온도로 시작하여 낮 동안에는 올라갔다가 밤이 되면 다시 내려갔다. 따라서 일반적으로 오전과 오후에 같은 온도가 되는 시각이 존재하는데, 이는 기온의 변화가 연속적이기 때문이다.

기온 이외에도 항공기의 고도, 댐의 수위 등 그 변화가 연속적인 예를 생활 주변에서 찾아볼 수 있다.







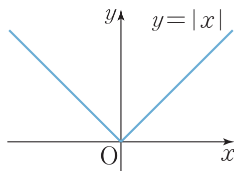


함수의 연속에 들어가기 전에

1. 함수 $y=|x|$의 그래프

$$|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

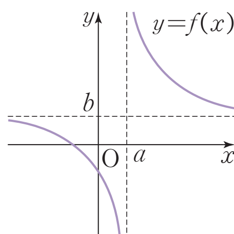
이므로 $y=|x|$의 그래프는 $x\ge 0$, $x<0$인 경우로 나누어 그린다.



2. 함수 $y=\dfrac{1}{x-a}+b$의 그래프

① 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동 한 것이다.

② 두 직선 $x=a$, $y=b$를 점근선으로 한다.



3. 이차함수의 최댓값과 최솟값

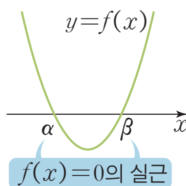
$a\le x\le b$일 때, 이차함수 $f(x)=k(x-p)^2+q$에 대하여

① $a\le p\le b$이면 $f(a)$, $f(b)$, $f(p)$ 중에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

② $p<a$ 또는 $p>b$이면 $f(a)$, $f(b)$ 중에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

4. 그래프와 방정식의 실근

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=0$의 실근이다.



1 다음 함수의 그래프를 그리고 연결되지 않는 곳이 있는지 알아보아라.

(1) $y=|x-1|$

(2) $y=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

2 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}$

(2) $y=\dfrac{1}{x-2}+2$

3 다음 함수의 주어진 범위에서 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=-x^2+4x\ \ (-1\le x\le 3)$

(2) $y=x^2-2x+3\ (-2\le x\le 2)$

4 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 좌표가 각각 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

1. 함수의 연속

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

함수의 연속과 불연속

① 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

> Ⅰ. 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다. Ⅱ. 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.
> Ⅲ. $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

② 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 (1) ☐ 이라고 한다.

구간

① 닫힌 구간: $a \le x \le b$

② 반닫힌 구간(반열린 구간): $a \le x < b$, $a < x \le b$

③ 열린 구간: $a < x$ (2) ☐ b

연속함수와 그 성질

① 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 (3) ☐ 함수라고 한다.

② 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

- $kf(x)$ (단, k는 상수)
- $f(x) \pm g(x)$
- $f(x)g(x)$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x) \neq 0$)

최대·최소의 정리

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 (4) ☐ 을 가진다.

중간값의 정리

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 28~37쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 불연속 (2) < (3) 연속 (4) 최솟값

프 로 젝 트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

극한으로 나타낸 함수의 연속 또는 불연속

| 문제 | 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$의 연속 또는 불연속을 알아보자.

1단계_ 다음과 같은 r의 값에 대하여 무한등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산을 조사하여라.

(i) $r>1$일 때, __________

(ii) $r=1$일 때, __________

(iii) $|r|<1$일 때, __________

(iv) $r\le -1$일 때, __________

2단계_ 다음과 같은 x의 값에 대하여 함숫값 $f(x)$를 구하여라.

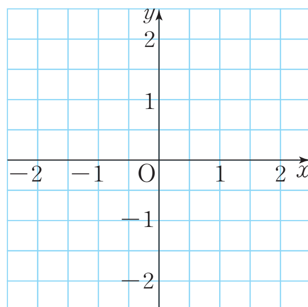
(i) $x=1$일 때, __________

(ii) $x=-1$일 때, __________

(iii) $|x|<1$일 때, __________

(iv) $|x|>1$일 때, __________

3단계_ 위의 결과를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려라.

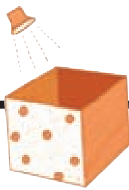


4단계_ 주어진 함수의 연속성을 조사하여라.

____

논술/수행평가 과제

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$의 그래프를 그리고, 연속성을 조사하여 보자.

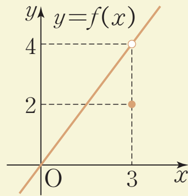


바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) $f(3)$의 값을 구하여라.

(2) 극한 $\lim_{x \to 3} f(x)$를 조사하여라.

(3) $\lim_{x \to 3} f(x)=f(3)$이 성립하는지 조사하여라.

(4) $x=3$에서의 연속성을 조사하여라.

〔풀이〕

(1) $f(3)=2$

(2) $\lim_{x \to 3+0} f(x)=4$, $\lim_{x \to 3-0} f(x)=4$이므로

$$\lim_{x \to 3} f(x)=4$$

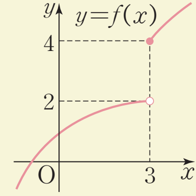
(3) $\lim_{x \to 3} f(x)=4$, $f(3)=2$이므로

$$\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$$

(4) $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 x에서 연속이다.

| 스스로 하기 |

1. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) $f(3)$의 값을 구하여라.

(2) 극한 $\lim_{x \to 3} f(x)$를 조사하여라.

(3) $\lim_{x \to 3} f(x)=f(3)$이 성립하는지 조사하여라.

(4) $x=3$에서의 연속성을 조사하여라.

〔풀이〕

(1) $f(3)=\square$

(2) $\lim_{x \to 3+0} f(x)=\square$, $\lim_{x \to 3-0} f(x)=\square$

이므로 $\lim_{x \to 3} f(x)$는 존재하지 않는다.

(3) $\lim_{x \to 3} f(x)$가 존재하지 않으므로

$$\lim_{x \to 3} f(x) \square f(3)$$

(4) $\lim_{x \to 3} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 $\square$이고, 그 밖의 모든 x에서 연속이다.

교과서 32쪽

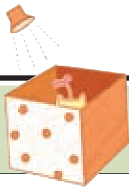
1 다음 함수가 연속이 되는 구간을 구하여라.

(1) $y=2x+3$ (2) $y=\sqrt{x-1}$

교과서 35쪽

2 다음 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^2-2x+1$ $[-1, 1]$ (2) $f(x)=\cos x$ $[0, \pi]$



기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 함수 중 $x=0$에서 연속인 함수를 모두 골라라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

ㄱ. $f(x)=[x]$　　ㄴ. $g(x)=|x(x-1)|$　　ㄷ. $h(x)=\dfrac{x-1}{x}$

2 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & (x\neq1) \\ a & (x=1) \end{cases}$가 모든 실수에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

x값의 범위를 $|x|>1$, $|x|<1$, $x=1$, $x=-1$인 경우로 나누어 생각한다.

3 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$의 그래프를 그리고, 연속 또는 불연속을 조사하여라.

중간값의 정리를 이용한다.

4 다음 방정식 중 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것을 모두 골라라.

ㄱ. $3x^2+2x-3=0$ $(0,\ 1)$　　ㄴ. $x^3+x-8=0$ $(1,\ 2)$

ㄷ. $\cos x-x=0$ $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$　　ㄹ. $2^x+x-1=0$ $(0,\ 1)$



5 어느 주차장에서는 주차 요금을 다음과 같이 받는다.

Ⅰ. 처음 30분까지는 3000원

Ⅱ. 30분을 초과할 때에는 10분마다 500원

주차 시간 x분에 대한 주차 요금을 $f(x)$원이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $0\le x\le60$일 때, $y=f(x)$의 그래프를 그려라.

(2) (1)에서 구한 함수의 연속 또는 불연속을 조사하여라.



개념 넓히기

공평한 분배

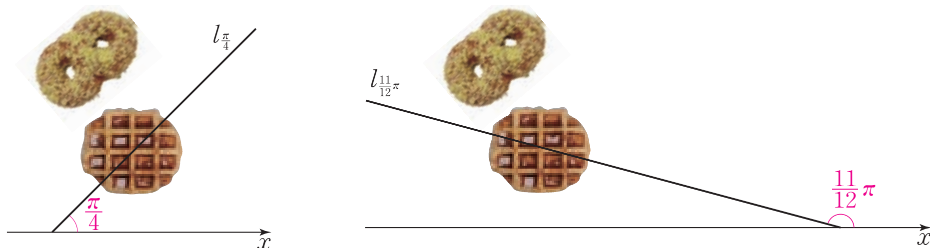
실생활에서 어떤 양을 똑같이 나누어야 할 때가 종종 있다. 이때, 연속 변량의 경우에는 중간값의 정리를 활용하여 이러한 문제를 해결할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 와플이 놓여 있다고 하자. 그러면 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ_0 $(0<\theta_0<\pi)$으로 일정한 직선 중에서 이 와플의 넓이를 정확하게 이등분하는 것이 있다. 이 사실은 연속 함수의 성질인 중간값의 정리를 이용하여 밝힐 수 있다.

그렇다면 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 있는 와플과 도넛을 동시에 이등분하는 직선이 존재할까?

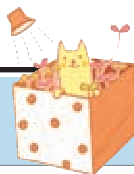
와플의 넓이를 a, 도넛의 넓이를 b라고 할 때, 와플의 넓이를 이등분하면서 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선을 l_θ라 하고, l_θ의 왼쪽에 있는 도넛의 넓이를 $g(\theta)$라고 하자.

다음 그림에서 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=b$이고 $g\left(\frac{11}{12}\pi\right)=0$임을 알 수 있다.



그런데 $g(\theta)$는 연속함수이므로 $g(\theta)=\frac{b}{2}$를 만족하는 θ가 $\frac{\pi}{4}$와 $\frac{11}{12}\pi$ 사이에 반드시 존재한다. 즉, 와플과 도넛을 동시에 이등분하는 직선이 존재한다.

확인학습 1 와플을 서로 만나는 두 개의 직선으로 사등분할 수 있는지 조사하여라.



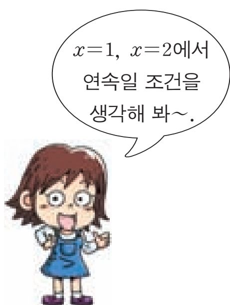
실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 두 함수 $f(x)=[x]$, $g(x)=\sin x$에 대하여 다음 함수의 주어진 점에서 연속 또는 불연속을 조사하여라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $y=f(g(x))$ $[x=0]$　　　(2) $y=g(f(x))$ $[x=\pi]$



2 함수 $f(x)=\begin{cases} ax+1 & (x<1,\ x>2) \\ x^2-x+b & (1\le x\le 2) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

$1\le 1+\sin^2 x\le 2$이므로 $\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+\sin^2 x}\le 1$이다.

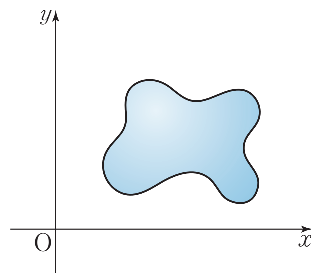
3 구간 $(0,\ 4\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}$가 불연속이 되는 x의 값을 모두 구하여라.

4 다음 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

(1) $x-\frac{1}{x+1}=0$ $(0,\ 2)$　　　(2) $x\cos x-\sin x=0$ $\left(\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$

중간값의 정리를 이용한다.

5 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 있는 도형을 넓이가 똑같은 두 개의 도형으로 나누는 x축과 평행한 직선이 있는지 조사하여라. 또 넓이가 똑같은 3개의 도형으로 나누는 x축과 평행한 직선들이 있는지 조사하여라.



I 대단원 확인하기

이해

1 ★

다음 극한을 조사하고, 극한값이 존재하면 그 값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2}{x+1}$

(2) $\lim_{x \to -1} \frac{2}{(x+1)^2}$

(3) $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

(4) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3+1}{x^2-x-2}$

계산

2 ★★

다음 극한값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{a^2}{a+1}\right)$

(2) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x+1}}$

(3) $\lim_{x \to 3+0} \frac{|x^2-9|}{x-3}$

(4) $\lim_{x \to 1+0} \frac{x-[x]}{x^3-1}$

이해

3 ★

함수 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2}$일 때, $\lim_{x \to -1} f(x)=-1$, $\lim_{x \to \infty} f(x)=2$를 만족하는 세 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

이해

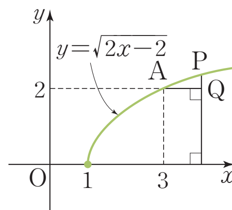
4 ★★

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x+1 \le f(x) \le x+2$를 만족할 때, 극한값 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$를 구하여라.

추론

5 ★★

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{2x-2}$ 위를 움직이는 점 P에서 x축에 내린 수선 또는 수선의 연장선 위에 점 A(3, 2)에서 내린 수선의 발을 Q라고 하자. 점 P가 점 A에 한없이 가까워질 때, $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}$의 극한값을 구하여라.



이해

6 ★★

다음 함수의 주어진 구간에서 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=2^{x^2-2x+3}$ $[0,\ 3]$ (2) $g(x)=\log_3 x+3$ $[1,\ 9]$

이해

7 ★★

다음 함수의 $x=0$에서 연속 또는 불연속을 조사하여라.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $f(x)=[x]^2+(x+1)[x]$ (2) $f(x)=[x]^2+(2x-1)[x]$

의사소통

8 ★★

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 다음 함수 중 $x=a$에서 항상 연속인 것을 모두 골라라. (단, $f(a)\neq0$)

ㄱ. $y=\{f(x)\}^2$ ㄴ. $y=\dfrac{1}{f(x)}$

ㄷ. $y=10^{f(x)}$ ㄹ. $y=f(f(x))$

문제 해결

9 ★★

방정식 $\log_{10} x=3-x$는 하나의 실근을 가진다. 이 값이 자연수 n에 대하여 구간 $(n,\ n+1)$에 있을 때, n의 값을 구하여라.

문제 해결

10 ★★★

다음 표는 2008년 8월 30일 3시간마다 측정한 대관령의 기온을 기록한 것이다.

시각(시)	03	06	09	12	15	18	21	24
기온 (℃)	14.3	13.2	16.9	18.5	20.5	17.6	15.9	14.8

이날 대관령의 평균 기온이 16.5 ℃일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 기온은 시간의 흐름에 따라 연속적으로 변한다. 이날 대관령의 기온 변화를 그래프로 나타내어라.

(2) 기온이 평균 기온과 일치하는 시각이 적어도 몇 번 있는지 추측하여라.



읽기 자료

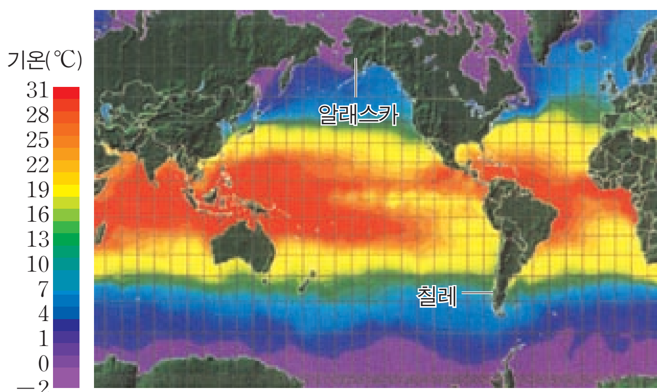
자연 속의 중간값의 정리

자연 현상이나 일상생활에는 연속인 함수로 표현할 수 있는 것들이 많이 있다.

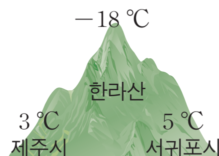
기온이나 물체의 속도는 시간에 따라 연속적으로 변하므로 닫힌 구간에서 연속인 함수로 나타낼 수 있으며 그 함수에 대하여 중간값의 정리가 성립한다.

북극과 남극의 기온은 영하의 낮은 온도이고 적도 부근의 기온은 영상의 높은 온도이다. 그러므로 알래스카 위쪽의 북극으로부터 태평양 연안의 해안선을 따라 칠레 아래쪽의 남극까지 이동하면 기온은 영하에서 시작하여 영상으로, 그리고 다시 영하로 연속적으로 변하게 된다.

따라서 중간값의 정리를 이용하면 북아메리카 해안과 남아메리카 해안에는 서로 기온이 같은 지점이 반드시 존재함을 알 수 있다.



또한 한라산의 북쪽 사면과 남쪽 사면에는 서로 기온이 같은 지점이 반드시 존재하게 되고, 양쪽면의 식물 분포가 같은 지역이 존재한다.



식물대	북쪽 사면 해발 고도	남쪽 사면 해발 고도
고산 식물대	1900 m 이상	1850 m 이상
관목대	1500 m 이상 ~ 1900 m 미만	1700 m 이상 ~ 1850 m 미만
교목대	700 m 이상 ~ 1200 m 미만	1000 m 이상 ~ 1500 m 미만
산야 식물대	250 m 이상 ~ 700 m 미만	350 m 이상 ~ 1000 m 미만
평야 식물대	50 m 이상 ~ 250 m 미만	50 m 이상 ~ 350 m 미만
해안 식물대	50 m 미만	50 m 미만

프 로 젝 트

* 수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

극한값과 절대 온도

온도를 나타낼 때 우리나라와 같이 섭씨온도를 사용하는 나라가 있고, 미국과 같이 화씨온도를 사용하는 나라가 있다. 섭씨온도에서는 1기압 아래에서 물이 어는점을 0 ℃, 끓는점을 100 ℃로 정했고, 화씨온도에서는 1기압 아래에서 물이 어는점을 32 °F, 끓는점을 212 °F로 정했다.

섭씨온도나 화씨온도 이외에도 과학적 온도 측정의 기본단위로 쓰이는 절대 온도가 있다.

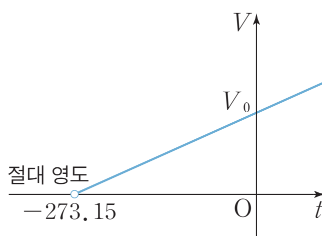
1기압 아래에서 온도 t ℃일 때의 기체의 부피를 V L, 0 ℃일 때의 기체의 부피를 V_0 L라고 하면

$$V=V_0\left(1+\frac{t}{273.15}\right)$$

의 관계식이 성립한다. 이때, $t\le -273.15$이려면 부피가 0 또는 음의 값을 가져야 하는데, 이러한 현상은 실제로 일어날 수 없다. 다만, t가 -273.15에 한없이 가까워질 수 있을 뿐이다. 이러한 의미에서 부피가 0 L일 때, 온도 t ℃의 우극한

$$\lim_{V\to+0} t=\lim_{V\to+0} 273.15\left(\frac{V}{V_0}-1\right)=-273.15\ (℃)$$

를 절대 영도라고 한다.



절대 온도는 절대 영도 -273.15 ℃를 기준점, 즉 영도로 정하고 눈금의 간격을 섭씨온도와 같게 한 것이다. 절대 온도의 단위는 K를 사용하고 켈빈이라고 읽는다.

따라서 절대 온도 T K과 섭씨온도 t ℃ 사이에는

$$T=273.15+t$$

의 관계식이 성립한다.

| 문제 |



섭씨온도 0 ℃에서의 부피가 22.4334 L인 수소 기체의 섭씨온도 t ℃에서의 부피를 V L라고 하면

$$V=0.08213\,t+22.4334$$

의 관계식이 성립한다. 이때, 극한값 $\lim_{V\to+0} t$를 구하여 보자. (단, 소수 셋째 자리에서 반올림하여라.)

II 다항함수의 미분법

스키 또는 윈드서핑에서 보드는 지면 또는 수면의 접선 방향으로 진행한다.

또 우주선이 지구로 귀환할 때에도 원의 접선 방향이 활용되며,

기업에서 최대 이윤을 얻기 위한 생산량을 결정할 때에도 미분은 중요한

도구로 사용된다.

이와 같이 미분의 개념은 자연과학뿐만 아니라 스포츠, 공학, 기업 경영 등

우리 생활의 여러 분야에서 유용하게 쓰인다.





미적분학을 발견한 뉴턴

_Newton, I. ; 1642~1727



뉴턴은 영국의 물리학자, 천문학자, 수학자로 만유인력 법칙을 발견하여 역학의 체계를 확립하였다. 뉴턴은 만유인력 법칙뿐만 아니라 미분법도 발견하였다. 그의 만유인력 법칙과 미분법을 이용하면 태양과 행성 사이의 관계를 쉽게 증명할 수 있다. 즉, '행성은 태양의 둘레를 타원형의 궤도를 그리면서 운동한다.'는 케플러 법칙을 불과 한두 쪽의 분량으로 증명할 수도 있다. 이외에도 미분법은 현대 과학의 여러 분야에서 많이 활용되고 있다.

뉴턴이 남긴 다음 명언은 배움의 길에 있는 사람들에게 많은 시사점을 준다.

"만일 내가 다른 사람들보다 조금이라도 멀리 내다볼 수 있었다고 한다면 그것은 내가 거인의 어깨 위에 서 있었기 때문이다."

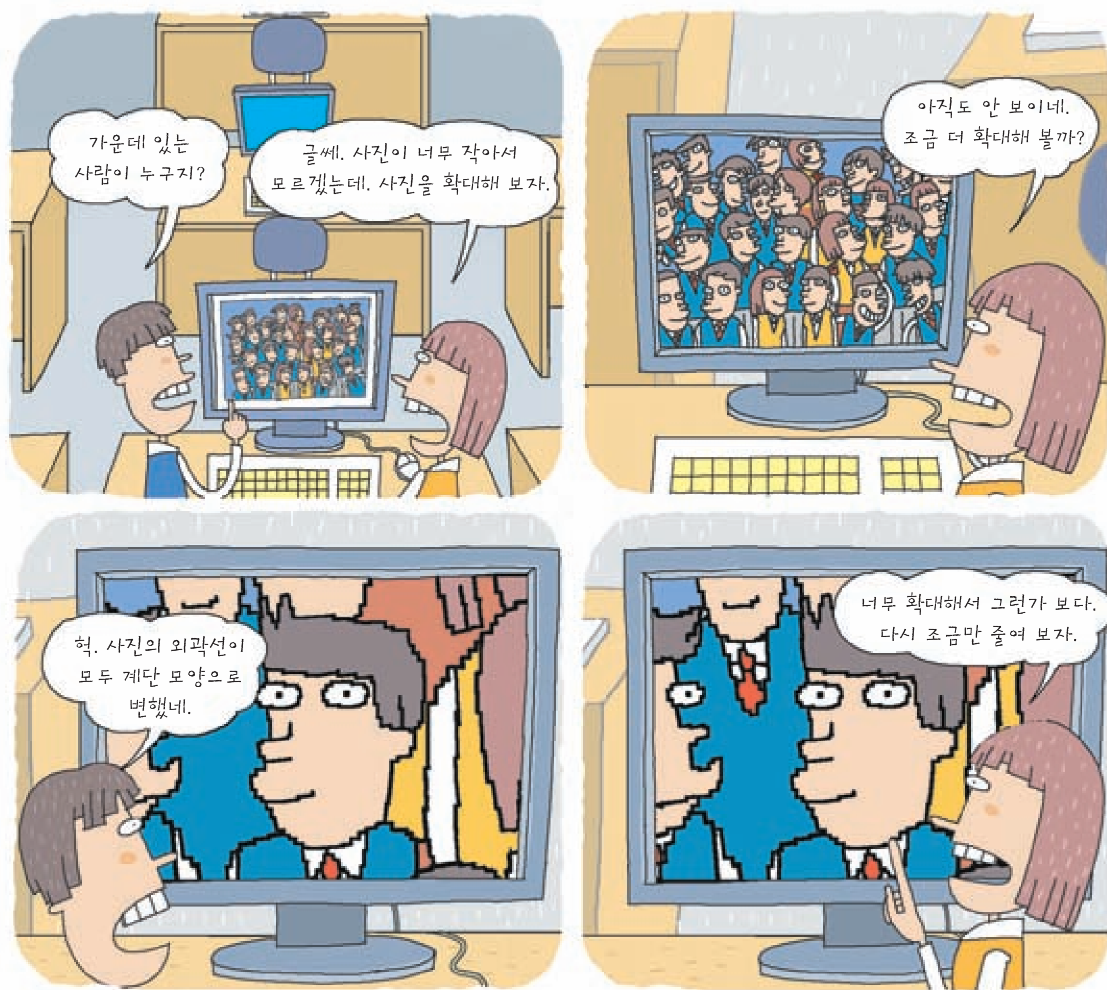
1 미분계수와 도함수

학습 목표

- 미분계수의 뜻과 기하학적 의미를 알고, 그 값을 구할 수 있다.
- 미분가능성과 연속성의 관계를 이해할 수 있다.
- 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

1. 미분계수

2. 도함수의 정의와 미분법



컴퓨터에서 표시되는 곡선을 확대해 보면 선분이 연결된 것임을 알 수 있다. 이와 같이 어떤 곡선이 주어졌을 때, 충분히 짧은 구간에서 곡선을 직선으로 간주하는 것이 가능하다. 미분계수는 이와 같이 곡선을 충분히 짧은 구간에서 직선으로 보아 그 극한값을 계산한 것이다.

미분계수와 도함수에 들어가기 전에

1. 직선의 기울기

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기 m은

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

이다.

2. 함수의 극한

함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 서로 같을 때, 즉 $\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$일 때, $x=a$에서 $f(x)$의 극한값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$이다.

3. 함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$이고, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$일 때, 다음이 성립한다.

① $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

② $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=\alpha+\beta$

③ $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=\alpha-\beta$

④ $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq 0$, $\beta\neq 0$)

4. 함수의 연속성

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

① $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다.

② 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

③ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

---

1 다음 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구하여라.

(1) $(0, 2)$, $(-3, -2)$

(2) $(-1, 3)$, $(2, -3)$

2 함수 $f(x)=\begin{cases}-x+3 & (x>1)\\ k & (x\le 1)\end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재할 때, k의 값을 구하여라.

3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{t\to 2}(t^2+3t)$

(2) $\lim_{t\to 1}\frac{3t+5}{t-2}$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$

(4) $\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}$

4 다음 함수의 연속성을 조사하여라.

(1) $y=\frac{2x}{x^2-1}$

(2) $y=\begin{cases}\frac{x+2}{|x+2|} & (x\neq -2)\\ 0 & (x=-2)\end{cases}$

1. 미분계수

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ (\text{단, } \Delta x=b-a)$$

| 보기 | 함수 $y=x^2$에서 x의 값이 3에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-\boxed{(1)}}{5-3}=\frac{\boxed{(2)}}{2}=\boxed{(3)}$$

● 미분계수

① 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

② $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

③ $f'(a)$를 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라고 한다.

● 미분계수의 기하학적 의미

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 $\boxed{(4)}$이다.

● 미분가능성과 연속성

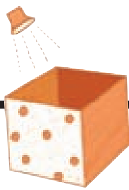
함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 그 점에서 연속이다. 그러나 그 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

| 보기 | 함수 $y=|2x-1|$은 $x=\frac{1}{2}$에서 연속이지만 미분$\boxed{(5)}$



⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 44~53쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $f(3)$ (2) 16 (3) 8 (4) 기울기 (5) 가능하지 않다.



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 함수 $f(x)=2x$의 $x=2$에서의 미분계수 $f'(2)$를 구하여라.

〔풀이〕

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(2+\Delta x)-2\cdot 2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

2. 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

〔풀이〕

$f(x)=x^2$으로 놓으면 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기, 즉 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$은 다음과 같다.

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$$

| 스스로 하기 |

1. 함수 $f(x)=-x$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$을 구하여라.

〔풀이〕

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(1+\Delta x)-(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\square}{\Delta x}=\square$$

2. 곡선 $y=-x^2$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

〔풀이〕

$f(x)=-x^2$으로 놓으면 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 $\square$, 즉 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$은 다음과 같다.

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(1+\Delta x)^2-(-1)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\square}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\square)=\square$$

교과서 46쪽

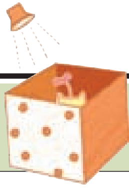
1 다음 함수에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

(1) $f(x)=3x+1$ (2) $f(x)=(x-3)^2$

교과서 48쪽

2 다음 함수의 $x=2$에서의 미분계수 $f'(2)$를 구하여라.

(1) $f(x)=-2x+5$ (2) $f(x)=(x+3)^2$



기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 함수에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

(1) $f(x)=-2x+3$　　(2) $f(x)=x^3+1$

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2 다음 함수의 [　] 안에 주어진 값에서의 미분계수를 구하여라.

(1) $f(x)=-2$ $[x=10]$　　(2) $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ $[x=-10]$

(3) $f(x)=x^2+100$ $[x=-1]$　　(4) $f(x)=-x^3-1$ $[x=3]$

3 곡선 $y=x^2+x+3$에 대하여 다음 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

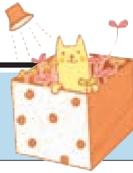
(1) $(-2,\ 5)$　　(2) $(-1,\ 3)$

(3) $(1,\ 5)$　　(4) $(0,\ 3)$

$x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속이다.

4 함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x\geq 1) \\ x^2 & (x<1) \end{cases}$가 모든 점에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

5 함수 $f(x)=2x^2-1$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$과 점 $\mathrm{Q}(a,\ 2a^2-1)$을 지나는 직선의 기울기를 $g(a)$라고 할 때, $\lim_{a\to 1}g(a)$의 값을 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 $f'(2)=1$일 때, 극한값 $\lim_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{f(x^2)-f(2)}{x-\sqrt{2}}$를 구하여라.

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이다.

2 삼차함수 $f(x)=x^3+x^2+x+1$의 그래프 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 2일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

3 함수 $f(x)=x^3$에서 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 점 $(a,\ a^3)$에서의 접선의 기울기와 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(단, $a\neq 1$)

4 함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$, $x=-1$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보여라.

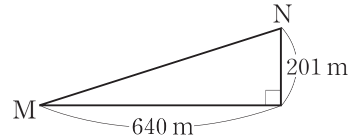
5 물체가 자유 낙하하기 시작하여 x초 동안 낙하한 거리를 y m라고 하면 $y=4.9x^2$의 관계식이 성립한다. 이 물체가 자유 낙하하기 시작하여 a초에서 b초까지의 평균속도를 구하여라. (단, $0<a<b$)



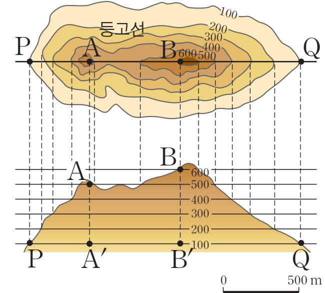
6 어떤 제품을 x개 생산하는 데 소요되는 총비용을 $C(x)$라고 할 때, $\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta C}{\Delta x}$를 생산량이 x개일 때의 한계 비용이라고 한다. 총비용 $C(x)$가 $C(x)=10000+50x+0.1x^2$(원)일 때, 제품의 생산량이 100개일 때의 한계 비용을 구하여라.

평균변화율을 이용하여 경사도 비교하기

경사면에서 두 지점 사이의 수평 거리와 높이를 이용하여 평균 경사도를 나타낼 수 있다. 예를 들어 오른쪽 그림에서 M 지점과 N 지점 사이의 평균 경사도는 $\frac{201}{640}$이다.



| 문제 | 오른쪽 그림은 어떤 산의 평면도와 두 지점 P, Q를 지나는 단면도를 동시에 그린 것이다. P 지점에서 A 지점으로 오를 때와 Q 지점에서 B 지점으로 오를 때, 어느 쪽이 더 가파른 길인지 평균 경사도를 이용하여 비교하여 보자. (단, 두 지점 A, B의 높이는 각각 500 m, 600 m, $\overline{PA'}=400$ (m), $\overline{PB'}=1000$ (m), $\overline{PQ}=1800$ (m)이다.)



1단계_ 단면도에서 점 P를 원점으로 하고 직선 PQ를 x축, 점 P를 지나고 직선 PQ에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면에서 네 지점 A, B, P, Q의 좌표를 각각 구하여라.

2단계_ 경사면 PA와 경사면 QB의 평균 경사도를 비교하여라.

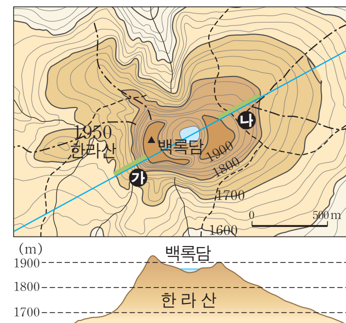
*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

3단계_ P 지점에서 A 지점으로 오를 때와 Q 지점에서 B 지점으로 오를 때, 어느 쪽이 높이의 변화 정도가 심한지 말하여라.

4단계_ 자신이 등산한다면 어떤 등산로를 선택할지 말하여라. 또 그 이유를 말하여라.

논술/수행평가 과제 (준비물: 자)

오른쪽 그림은 한라산의 등고선 지도와 단면도이다. 자를 사용하여 백록담으로 오르는 서쪽 경사면 ㉮와 동쪽 경사면 ㉯의 경사도를 비교하여 보자.



2. 도함수의 정의와 미분법

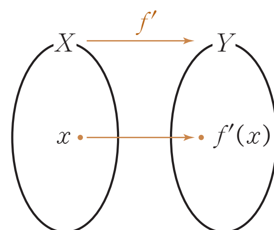
* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

도함수의 뜻

미분가능한 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 그 미분계수를 대응시킨 함수

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 $f(x)$의 도함수라 하고, 기호로 $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$와 같이 나타낸다.



| 참고 | 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하며, 그 계산법을 (1) ☐ 이라고 한다.

미분법의 공식 (1)

① $f(x)=x^n$ (n은 자연수)이면 $f'(x)=nx^{n-1}$

② $f(x)=c$ (c는 상수)이면 $f'(x)=0$

| 보기 | ① $f(x)=x^{100}$의 도함수는 $f'(x)=$ (2) ☐ x^{99}

② $f(x)=15$의 도함수는 $f'(x)=$ (3) ☐

미분법의 공식 (2)

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

② $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)$ (4) ☐ $g'(x)$

③ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)$ (5) ☐ $g'(x)$

④ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

| 보기 | $y=(x^2+x)(x-3)$의 도함수는

$y'=(x^2+x)'(x-3)+(x^2+x)(x-3)'$

$=$ (6) ☐ $(x-3)+x^2+x$

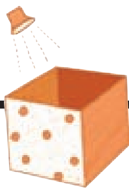
$=2x^2-5x-3+x^2+x$

$=3x^2-4x-3$



⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 54~59쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 미분법 (2) 100 (3) 0 (4) + (5) − (6) $(2x+1)$



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 도함수의 정의를 이용하여 함수 $f(x)=x^2+x$의 도함수를 구하여라.

〔풀이〕

$f'(x)$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\}-(x^2+x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x+1)=2x+1$

2. 다음 함수를 미분하여라.

(1) $f(x)=x^3$

(2) $f(x)=x^4+3x^2-10$

〔풀이〕

(1) $(x^n)'=nx^{n-1}$이므로

$f'(x)=(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$

(2) 미분법의 공식에 의하여

$(x^4+3x^2-10)'$

$=(x^4)'+(3x^2)'+(-10)'$

$=4x^3+3(x^2)'$

$=4x^3+6x$

| 스스로 하기 |

1. 도함수의 정의를 이용하여 함수 $f(x)=x^2$의 도함수를 구하여라.

〔풀이〕

$f'(x)$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} (\boxed{\quad\quad})=\boxed{\quad}$

2. 다음 함수를 미분하여라.

(1) $f(x)=x^4$

(2) $f(x)=x^5+2x^3+1$

〔풀이〕

(1) $(x^n)'=nx^{n-1}$이므로

$(x^4)'=\boxed{\quad\quad}$

(2) 미분법의 공식에 의하여

$(x^5+2x^3+1)'$

$=(x^5)'+(\boxed{\quad\quad})'+(1)'$

$=\boxed{\quad\quad}+2(\boxed{\quad})'$

$=\boxed{\quad\quad\quad}$

교과서 55쪽

1 함수 $y=f(x)$에 대하여 다음 중 서로 같은 것을 모두 골라라.

ㄱ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ㄴ. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

ㄷ. $\lim_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$

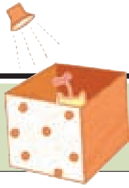
ㄹ. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)-f(\Delta x)}{\Delta x}$

교과서 56, 59쪽

2 다음 함수를 미분하여라.

(1) $f(x)=(x+3)(x-1)$

(2) $f(x)=x^8-x^4+x^2-1$



기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=x^{20}+x^{10}-x^5$

(2) $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$

(3) $f(x)=(2x+1)^2$

(4) $f(x)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D에 대하여 $D=b^2-4ac\le0$을 만족하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$

2 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x+1$의 도함수 $f'(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$을 만족할 때, a값의 범위를 구하여라.

3 함수 $f(x)=x^3+ax+b$에 대하여 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

$$3f(x)=x\{f'(x)+2\}$$

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+ah)-f(x)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+ah)-f(x)}{ah}\cdot a$

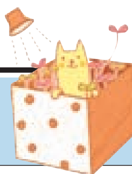
4 함수 $f(x)=x^5+5x+1$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}$를 구하여라.

5 어떤 공장에서 시각 x일 때의 전력 사용량을 y kWh라고 하면

$$y=-\frac{1}{20}x(x-8)(x-24)+20 \quad (0\le x<24)$$

의 관계식이 성립한다. 오전 6시일 때, 이 공장의 전력 사용량의 순간변화율을 구하여라.





실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

1 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$에 대하여 $\dfrac{f'(2)}{f'(1)}$의 값을 구하여라.

2 함수 $f(x)=x^5-x^4+x^3$에 대하여 다음을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(x+\frac{3}{n}\right)-f\left(x-\frac{4}{n}\right)\right\}$$

$f(x)$가 n차의 다항함수이면 $f'(x)$는 $(n-1)$차의 다항함수이다.

3 x에 대한 다항함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$에 대하여 등식

$$f'(x)\{f'(x)+3\}=3f(x)+x^2+5x-5$$

가 성립할 때, $f(x)$를 구하여라.

(단, $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.)

$\lim_{x\to a} f(x)=0$이고
$\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\alpha$이면
$\lim_{x\to a} g(x)=0$

4 삼차함수 $f(x)$가 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2,\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-1$을 만족할 때, $f(x)$를 구하여라.

5 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하여라.

$$[\{f(x)\}^n]'=n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$$

2 도함수의 활용

학습 목표

- 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- 함수의 증가, 감소와 극대, 극소를 이해하고, 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
- 방정식과 부등식에 활용할 수 있고, 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

1. 그래프에의 활용 2. 방정식과 부등식에의 활용 3. 속도와 가속도에의 활용









사과의 고장 충주에는 사과를 연구하는 사과 과학관이 있다. 이곳 사과 과학관에는 ‘켄트의 꽃(flower of Kent)’ 이라는 아주 특별한 사과나무가 있다. 이 사과나무는 영국의 물리학자이자 수학자인 뉴턴(Newton, I. ; 1642～1727)이 살던 켄싱턴 자택의 뜰에 있던 사과나무를 접목하여 번식한 것이다. 수학에서 뉴턴의 대표적인 업적으로 평가받는 미분법은 만유인력 법칙을 완성하는 데 중요한 역할을 하였다. 또 뉴턴은 미분법을 극대, 극소, 곡선의 접선 등의 문제를 해결하는 데 적용하였다.

도함수의 활용에 들어가기 전에

1. 직선의 방정식

① 기울기가 m이고 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

② 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

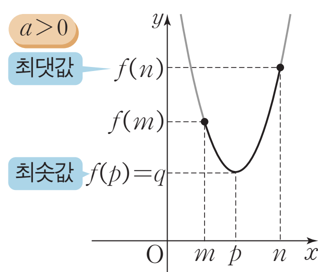
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

2. 이차함수의 최댓값과 최솟값

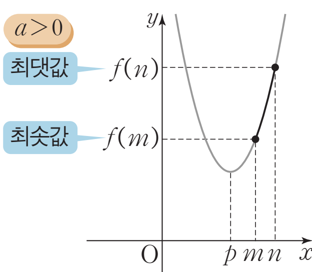
$m\le x\le n$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$에 대하여

① $m\le p\le n$ ⇨ $f(m)$, $f(p)$, $f(n)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값 (| 그림1 | 참조)

② $p<m$ 또는 $p>n$ ⇨ $f(m)$, $f(n)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값 (| 그림2 | 참조)



| 그림1 |



| 그림2 |

3. 판별식 $D<0$일 때, 이차부등식의 해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$이 허근을 가질 때

① $ax^2+bx+c>0$의 해는 모든 실수

② $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.

③ $ax^2+bx+c\ge 0$의 해는 모든 실수

④ $ax^2+bx+c\le 0$의 해는 없다.

4. 미분법의 공식

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

② $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

③ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

④ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

1 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 한 점 $(1,\ -2)$를 지나고 기울기가 3인 직선

(2) 두 점 $(-1,\ -2)$, $(-2,\ 3)$을 지나는 직선

2 다음 이차함수의 주어진 구간에서 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=x^2-2x+1$ $[0,\ 3]$

(2) $y=-x^2-2x-3$ $[0,\ 1]$

3 다음 부등식이 항상 성립하도록 상수 a값의 범위를 구하여라.

(1) $x^2+ax+2>0$

(2) $2x^2-x+a\ge 0$

4 다음 함수를 미분하여라.

(1) $f(x)=(x-2)^2$

(2) $f(x)=(x+1)(x^3+x+1)$

(3) $f(x)=x^6+x^5-7x^3+6x+5$

1. 그래프에의 활용

* [ ] 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

접선의 방정식

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=$ [(1)] $(x-a)$

② 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은
$m=f'(c)$일 때, $y-f(c)=m(x-c)$

함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 수 $x_1,\ x_2$에 대하여

① $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하면 $f(x)$는 그 구간에서 [(2)] 한다고 한다.

② $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하면 $f(x)$는 그 구간에서 [(3)] 한다고 한다.

미분가능한 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 [(4)] 한다.

② $f'(x)$ [(5)] 0이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

미분가능한 함수의 극대와 극소의 판정법

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양에서 음으로 바뀌면 $f(a)$는 [(6)] 이다.

② 음에서 양으로 바뀌면 $f(a)$는 [(7)] 이다.

함수의 그래프의 개형

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그릴 때에는 다음과 같은 단계를 따르면 편리하다.

1단계 도함수 $f'(x)$를 구한다.

2단계 $f'(x)=0$의 해를 구한다.

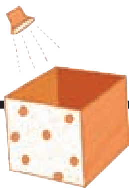
3단계 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들어 극값을 구한다.

4단계 그래프의 개형을 그린다.



···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 62~71쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $f'(a)$ (2) 증가 (3) 감소 (4) 증가 (5) $<$ (6) 극댓값 (7) 극솟값



바 탕 다 지 기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함 께 하 기 |

1. 다음 접선의 방정식을 구하여라.

(1) 곡선 $y=x^2-1$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선

(2) 곡선 $y=x^2+x$에 접하고 기울기가 -5인 접선

〔풀이〕

(1) $f(x)=x^2-1$로 놓으면

$$f'(x)=2x$$

이므로 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=4$$

이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-3=4(x-2)$$

$$\therefore\ y=4x-5$$

(2) $f(x)=x^2+x$로 놓으면

$$f'(x)=2x+1$$

접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 -5이므로

$$f'(a)=2a+1=-5$$

$$\therefore\ a=-3$$

이때, $f(-3)=9-3=6$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-6=-5\{x-(-3)\}$$

$$\therefore\ y=-5x-9$$

| 스 스 로 하 기 |

1. 다음 접선의 방정식을 구하여라.

(1) 곡선 $y=x^3+x$ 위의 점 $(2,\ 10)$에서의 접선

(2) 곡선 $y=-x^2+2x-1$에 접하고 기울기가 -2인 접선

〔풀이〕

(1) $f(x)=x^3+x$로 놓으면

$$f'(x)=\square$$

이므로 점 $(2,\ 10)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=\square$$

이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-10=\square(x-2)$$

$$\therefore\ \square$$

(2) $f(x)=-x^2+2x-1$로 놓으면

$$f'(x)=\square$$

접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 $\square$이므로

$$f'(a)=-2a+2=\square$$

$$\therefore\ a=\square$$

이때, $f(2)=\square$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-(\square)=\square(x-\square)$$

$$\therefore\ \square$$

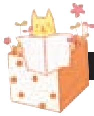
교과서 70쪽

1 함수 $f(x)=-2x^3+6x+5$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 도함수 $f'(x)$를 구하여라.

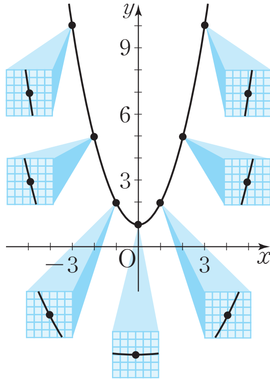
(2) $f'(x)=0$의 해를 구하여라.

(3) 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하여라.



읽기 자료

생활 속의 미분적 사고



변화를 연구하는 미분학에서는 미분적 사고를 필요로 한다. 왼쪽 그림과 같이 곡선 $y=x^2+1$의 아주 작은 부분만을 따로 떼어 직선으로 생각하는 것은 미분적 사고의 한 예이다.

우리 생활 전반에 걸쳐 찾을 수 있는 미분적 사고를 살펴보자.

1. 박물관의 토기

박물관에 진열되어 있는 토기는 멋진 곡면이지만 토기를 발굴할 당시에는 모두 조각나 있었을 것이다. 이 작은 조각은 곡면의 일부이지만 거의 평평하다.





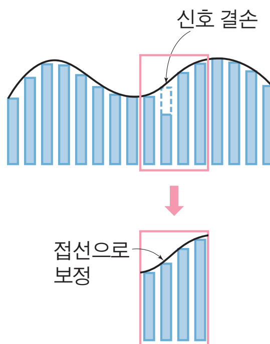
2. 지구 표면

인공위성에서 찍은 사진을 보면 알 수 있듯이 '지구는 둥글다.'는 것은 사실이다. 하지만 '내가 서 있는 부근'만을 생각하면 평평하다.

3. 컴퓨터 단층 촬영

병원에서 사용하는 컴퓨터 단층 촬영(CT)은 사람의 몸의 내부를 얇게 자른 형태로 계속하여 사진을 찍어 나간 후 그중에서 필요한 부분의 사진을 한 장씩 보는 것이다.



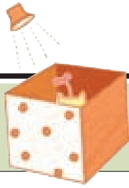


4. 디지털과 아날로그

본래 소리는 공기의 파동이므로 연속적인 곡선 형태를 지닌다. 이것을 디지털 정보로 변환하면 불연속적인 정보로 바뀌게 된다. 이렇게 저장된 정보를 다시 복원하려면 연속하는 두 점을 직선으로 이어주면 원래의 곡선과 유사하게 된다.

이때, 접선을 이용하면 일부가 훼손된 부분을 복구할 수도 있다.





기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

한 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

1 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선과 곡선 $y=x^2+ax+b$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선이 일치할 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

2 함수 $f(x)=x^3-ax^2+ax$가 일대일 대응이 되도록 상수 a값의 범위를 구하여라.

3 함수 $f(x)=-x^3+3x^2$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 도함수 $f'(x)$를 구하여라.

(2) $f'(x)=0$의 해를 구하여라.

(3) 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들어 극값을 구하여라.

(4) 그래프의 개형을 그려라.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$가 극점이면 $f'(a)=0$

4 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$의 극대점과 극소점의 좌표가 각각 $(-2, 1)$, $(-1, 0)$일 때, 세 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

5 어떤 공장에서 밧줄 x m를 만드는 데 드는 비용을 $C(x)$원이라고 하면

$$C(x)=\frac{1}{5}x^2-8x+2080 \ (x>0)$$

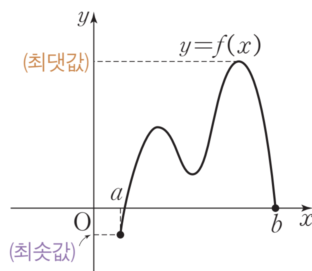
의 관계식이 성립한다. 비용이 최소일 때, 밧줄의 길이를 구하여라.





최댓값과 최솟값

다항함수 $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이므로 반드시 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다.



다항함수의 최댓값과 최솟값은 다음과 같이 구한다.

❶ 다항함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 극값을 가지지 않을 때

(1) $f(x)$의 최댓값은 $f(a)$, $f(b)$ 중에서 최대인 값이다.

(2) $f(x)$의 최솟값은 $f(a)$, $f(b)$ 중에서 최소인 값이다.

❷ 다항함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 극값을 가질 때

(1) $f(x)$의 최댓값은 극댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 최대인 값이다.

(2) $f(x)$의 최솟값은 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 최소인 값이다.

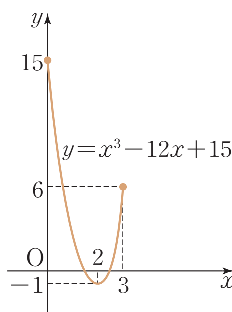
이를테면 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)=x^3-12x+15$에 대하여

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$

이로부터 구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	15	↘	-1 극솟값	↗	6

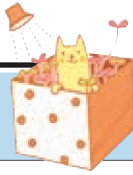


따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 15, 최솟값은 -1이다.

확인학습 **1** 다음 함수에 대하여 주어진 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=x^3-x^2 \qquad [-1,\ 2]$

(2) $y=x^3-6x^2+9x+1 \qquad [-1,\ 3]$



실 력 키 우 기

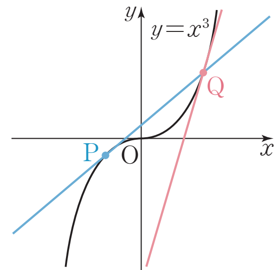
*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+6kx$의 극댓값과 극솟값의 차가 27이기 위한 상수 k의 값을 구하여라.

2 다음 함수의 극값을 구하고, 그 그래프의 개형을 그려라.

(1) $y=4x^3-3x+3$　　　　(2) $y=x^4-2x^2$

3 곡선 $y=x^3$ 위의 원점이 아닌 한 점 P에서의 접선이 다시 이 곡선과 만나는 점을 Q라고 할 때, 점 Q에서의 접선의 기울기는 점 P에서의 접선의 기울기의 4배임을 보여라.



4 어떤 해수욕장에서 기온이 30 ℃가 넘은 후 x시간이 지났을 때, 이 해수욕장을 방문한 사람의 수를 y라고 하면

$$y=x^3-12x^2+21x+105\ (0\le x\le 10)$$

의 관계식이 성립한다. 방문한 사람의 수가 가장 많았을 때와 가장 적었을 때의 x의 값을 구하여라.



5 원기둥 모양의 통나무를 단면이 원이 되도록 자른 후, 그 원에 내접하는 직사각형을 단면으로 하는 대들보를 만들려고 한다. 이 대들보의 위에서 누르는 힘에 대한 단위 길이당 강도가 대들보의 가로의 길이에 비례하고 세로의 길이의 제곱에 비례한다면 강도가 최대일 때, 대들보의 가로와 세로의 길이의 비를 구하여라.

컴퓨터로 함수의 접선 그리기

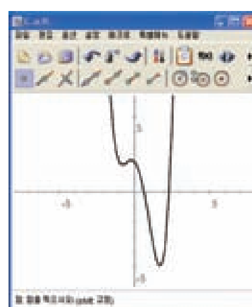
기하 작도용 소프트웨어인 C.a.R.를 이용하면 함수의 그래프와 접선을 쉽게 그릴 수 있다. 이 소프트웨어는 C.a.R. 홈페이지(http://www.z-u-l.de)에서 내려받을 수 있다.

방법1 C.a.R.를 이용하여 함수 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$ 위의 한 점에서의 접선을 그려 보자.

1단계 함수 아이콘 f(x) 을 클릭하면 | 그림1 | 과 같은 함수 창이 열린다. 함수 창의 '이름'에 'f'를 'y좌표를 나타내는 식'에 'x^4-x^3-2*x^2-x+2'를 입력한 후 확인을 클릭하면 | 그림2 | 와 같이 함수 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$의 그래프가 그려진다.



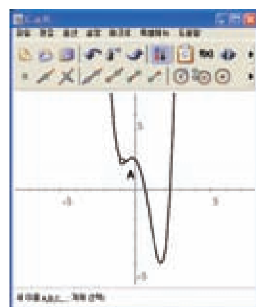
| 그림1 |



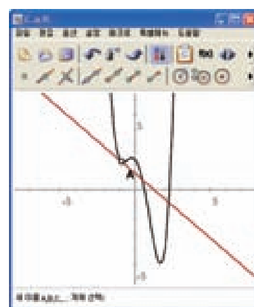
| 그림2 |

2단계 점 아이콘 을 선택한 후 그래프 위의 한 점을 클릭하여 점을 찍고, 새 이름 아이콘 을 선택한 후 다시 점을 클릭하면 | 그림3 | 과 같이 점 A가 작도된다.

3단계 함수 아이콘 f(x) 을 클릭하여 함수 창을 열어 'y좌표를 나타내는 식'에 'diff(f,x(A))*(x-x(A))+y(A)'를 입력하고, '붉은색'을 선택한 후 확인을 클릭하면 | 그림4 | 와 같이 점 A에서의 접선이 그려진다.



| 그림3 |



| 그림4 |

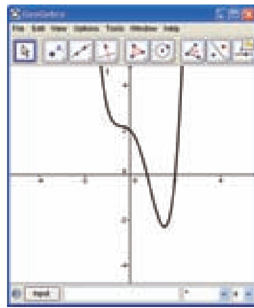
4단계 마우스 오른쪽 버튼을 이용하여 점 A를 끌기하여 움직여 보자.

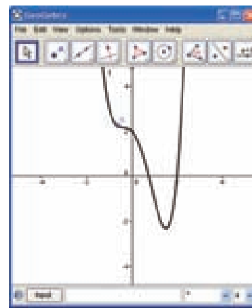
또 다른 기하 작도용 소프트웨어인 GeoGebra를 이용해도 함수의 그래프와 접선을 쉽게 그릴 수 있다. 이 소프트웨어는 GeoGebra 홈페이지(http://www.geogebra.org)에서 내려받을 수 있다.

방법2 GeoGebra를 이용하여 함수 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$ 위의 한 점에서의 접선을 그려 보자.

1단계 화면의 아래쪽에 있는 명령어 입력 줄(Input)에 'x^4−x^3−2*x^2−x+2'를 입력한 후 Enter 키를 누르면 | 그림5 | 와 같이 함수 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$의 그래프가 그려진다.

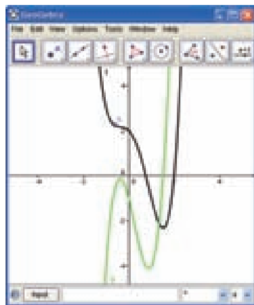
2단계 점 아이콘 [아이콘]을 선택한 후 그래프 위의 한 점을 클릭하면 | 그림6 | 과 같이 점 A가 작도된다.

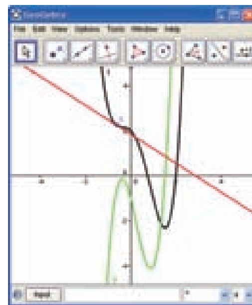

| 그림5 |


| 그림6 |

3단계 명령어 입력 줄(Input)에 'Derivative[f(x)]'를 입력한 후 Enter 키를 누르면 | 그림7 | 과 같이 $f(x)$의 도함수 $g(x)$의 그래프가 그려진다.

4단계 명령어 입력 줄(Input)에 'g(x(A))(x−x(A))+y(A)' 를 입력한 후 Enter 키를 누르면 | 그림8 | 과 같이 점 A에서의 접선이 그려진다.


| 그림7 |


| 그림8 |

5단계 마우스 오른쪽 버튼을 이용하여 점 A를 끌기하여 움직여 보자.

2. 방정식과 부등식에의 활용

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

방정식에의 활용

① 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 (1) ☐ 의 x좌표이다.
따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같다.

② 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다. 따라서 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

| 참고 | 함수의 그래프를 이용하면 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.

| 보기 | $f(x)=x^3-3x^2+2$에서 $f'(x)=3x(x-2)$이므로 극댓값은 $f(0)=2$이고, 극솟값은 $f(2)=8-12+2=-2$이다.
한편 (극댓값) × (극솟값) $=2\times(-2)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 (2) ☐ 점에서 만난다.
즉, 방정식 $x^3-3x^2+2=0$은 서로 다른 (3) ☐ 실근을 가진다.

부등식에의 활용

① 어떤 구간에서 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 보이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 주어진 구간에서 x축의 위쪽에 있음을 보이면 된다. 또는 $y=f(x)$의 최솟값이 (4) ☐ 보다 큼을 보이면 된다.

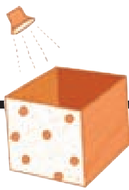
② 어떤 구간에서 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립함을 보이려면 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고, 함수 $y=h(x)$의 그래프가 주어진 구간에서 x축의 위쪽에 있음을 보이면 된다. 또는 $y=h(x)$의 최솟값이 (5) ☐ 보다 큼을 보이면 된다.

| 보기 | $f(x)=x^3+3x$에서 $f'(x)=3x^2+3=3(x^2+1)>0$이고 $f(0)=0$이므로 $x\geq 0$일 때, $f(x)$ (6) ☐ 0이다.
즉, $x\geq 0$일 때, 부등식 x^3+3x (7) ☐ 0이 항상 성립한다.



⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 72~75쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 교점 (2) 세 (3) 세 (4) 0 (5) 0 (6) ≥ (7) ≥



바 탕 다 지 기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함 께 하 기 |

1. 방정식 $2x^3-3x^2-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 상수 k값의 범위를 구하여라.

[풀이]

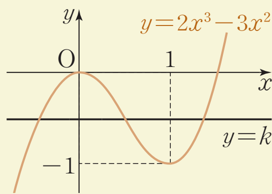
$f(x)=2x^3-3x^2$으로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0 극댓값	↘	-1 극솟값	↗



따라서 $-1<k<0$일 때, 방정식 $2x^3-3x^2-k=0$은 서로 다른 세 실근을 가진다.

| 스 스 로 하 기 |

1. 방정식 $4x^3+6x^2-k=0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 상수 k값의 범위를 구하여라.

[풀이]

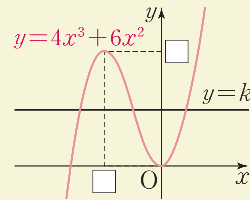
$f(x)=4x^3+6x^2$으로 놓으면

$f'(x)=12x^2+12x=12x(\square)$

$f'(x)=0$에서 $x=\square$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\square$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$\square$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\square$ 극댓값	↘	0 극솟값	↗



따라서 $\square$일 때, 방정식 $4x^3+6x^2-k=0$은 서로 다른 세 실근을 가진다.

교과서 74쪽

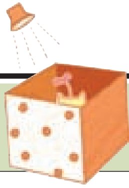
1 다음 방정식의 실근의 개수를 구하여라.

(1) $x^3-3x^2+5=0$　　　(2) $x^4+2x^2-1=0$

교과서 75쪽

2 모든 실수 x에 대하여 다음 부등식이 성립하기 위한 상수 k값의 범위를 구하여라.

(1) $x^4>4x-k$　　　(2) $x^4+x^3+x^2+k\geq 0$



기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

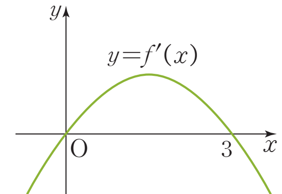
삼차방정식이 중근과 다른 한 실근을 가질 조건은 (극댓값)×(극솟값)$=0$ 이다.

1 삼차방정식 $2x^3+3x^2-12x+k=0$이 중근과 다른 한 실근을 가질 때, 상수 k의 값을 구하여라.

삼차방정식과 직선이 오직 한 점에서 만날 조건은 (극댓값)×(극솟값)>0 이다.

2 곡선 $y=2x^3-3x^2$과 직선 $y=12x+k$가 오직 한 점에서 만나기 위한 자연수 k의 최솟값을 구하여라.

3 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, $f(0)=1$, $f(3)=3$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수를 구하여라.

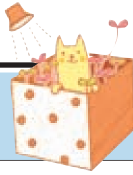


(최솟값)≥ 0임을 보인다.

4 모든 실수 x에 대하여 다음 부등식이 항상 성립함을 보여라.

$$4x^3 \leq 3x^4+1$$

5 두 함수 $f(x)=x^3+x^2+x$, $g(x)=4x^2+x+k$에 대하여 구간 $[1, 3]$에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 항상 성립하도록 하는 실수 k값의 범위를 구하여라.



실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

방정식 $f(x)=g(x)$의 근은 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표이다.

1 방정식 $x^3-3x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, 세 근을 작은 수부터 차례대로 α, β, γ라고 하자. 이때, $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$의 대소 관계를 말하여라. (단, $a>0$)

2 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(a)=f(a)=0,\ f'(b)=f(b)=0\ (\text{단, } a\neq b)$$

이 성립할 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

그래프를 그린 후 주어진 조건을 만족하는 k값의 범위를 구한다.

3 곡선 $y=x^3-x^2$ 밖의 한 점 $(0,\ k)$에서 곡선에 세 개의 접선을 그을 수 있을 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

4 사차함수 $f(x)=x^4-2x^3+kx^2$이 극댓값을 가질 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

5 양의 실수 x에 대하여 부등식 $2x^3-3x^2-12x+k\geq 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k값의 범위를 구하여라.

3. 속도와 가속도에의 활용

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 좌표 x가 시각 t의 함수 $x=f(t)$로 나타낼 때, 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=\boxed{(1)\quad}$$

| 보기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 좌표 x가 시각 t의 함수 $x=2t^3-15t^2$으로 나타날 때

시각 t에서의 속도 v는 $\quad v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-30t$

따라서 $t=2$일 때, 속도는 $\boxed{(2)\quad}$이다.

가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 속도 v가 시각 t의 함수 $v=g(t)$로 나타날 때, 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라고 하면

$$a=\boxed{(3)\quad}$$

| 보기 | 수직선 위를 움직이는 점 P의 속도 v가 시각 t의 함수 $v=6t^2-30t$로 나타날 때

시각 t에서의 가속도 a는 $\quad a=12t-30$

따라서 $t=2$일 때, 가속도는 $\boxed{(4)\quad}$이다.

읽 기 자 료

곡선의 구적

뉴턴은 1704년 출판된 '광학'의 부록 '곡선의 구적에 대하여'에서 다음과 같이 주장하였다.

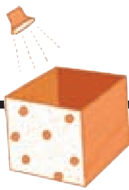
"수학적 양은 대단히 작은 부분으로 이루어진 것이 아니고 연속적인 운동에 의하여 그려진 것이다. 선은 그 작은 부분을 연결해서 생긴 것이 아니고 점의 연속적인 운동에 의하여 이루어졌으며, 면은 선의 운동으로 이루어지고, 시간은 연속적인 흐름에 의하여 생긴다."

뉴턴은 운동에서 속도, 가속도의 개념을 수학적으로 설명하기 위하여 유율의 개념을 도입하였다. 즉, 흐르는 양인 유량을 시간의 함수로 보고, 유량의 변화량을 흐름의 속도로 생각하여 이것을 유율이라고 하였다. 뉴턴은 유량을 x, y로, 유율을 $\dot{x}$, $\dot{y}$로 나타내었다. 또 유율을 계산하기 위하여 무한히 작은 변화를 생각한 후 이를 모멘트(moment)라고 하였다. 이것은 오늘날의 변수와 함수의 증분을 뜻한다.



···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 76~79쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $f'(t)$ (2) -36 (3) $\dfrac{dv}{dt}$ (4) -6



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 수직선 위를 움직이는 점 P의 좌표 x가 시각 t의 함수

$$x=t^4-4t^3+5$$

로 나타날 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 $t=5$에서의 속도와 가속도

(2) 운동 방향이 바뀌는 시각

〔풀이〕

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=(t^4-4t^3+5)'$

$=4t^3-12t^2$

따라서 $t=5$일 때, 속도는

$4\cdot5^3-12\cdot5^2=200$

한편 $a=\dfrac{dv}{dt}=(4t^3-12t^2)'$

$=12t^2-24t$

따라서 $t=5$일 때, 가속도는

$12\cdot5^2-24\cdot5=180$

(2) 점 P의 운동 방향이 바뀔 때, 점 P의 속도가 0이 되므로

$v=4t^3-12t^2=4t^2(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$

$t>0$이고 $t=3$을 기준으로 속도 v의 부호가 바뀌므로 구하는 시각은 3이다.

| 스스로 하기 |

1. 수직선 위를 움직이는 점 P의 좌표 x가 시각 t의 함수

$$x=t^3-5t^2+2t-1$$

로 나타날 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 $t=3$에서의 속도와 가속도

(2) 운동 방향이 바뀌는 시각

〔풀이〕

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=(t^3-5t^2+2t-1)'$

$=3t^2-\square+2$

따라서 $t=3$일 때, 속도는

$3\cdot3^2-\square+2=\square$

한편 $a=\dfrac{dv}{dt}=(3t^2-\square+2)'$

$=\square$

따라서 $t=3$일 때, 가속도는

$6\cdot3-10=\square$

(2) 점 P의 운동 방향이 바뀔 때, 점 P의 속도가 0이 되므로

$v=3t^2-\square+2=0$

$\therefore t=\dfrac{5\pm\sqrt{25-6}}{3}=\dfrac{5\pm\sqrt{19}}{3}$

$t>0$이고 $t=\dfrac{5\pm\sqrt{19}}{3}$를 기준으로 속도 v의 부호가 바뀌므로 구하는 시각은 $\dfrac{5\pm\sqrt{19}}{3}$이다.

교과서 78쪽

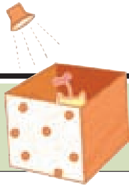
1 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 x가 다음과 같을 때, 속도와 가속도를 구하여라.

(1) $x=2t^3-3t^2-12$

(2) $x=-2t^3+t-2$

(3) $x=t^4+4$

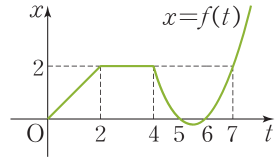
(4) $x=t^4-3t^3+t$



기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 x축 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 x가 오른쪽 그림과 같이 $x=f(t)$로 나타날 때, 다음 중 옳은 것을 골라라.



ㄱ. $t=3$일 때의 속도는 양의 값이다.
ㄴ. $t=5$일 때의 속도는 0이다.
ㄷ. $t=6$일 때의 점 P는 x축의 양의 방향으로 움직이고 있다.
ㄹ. $t=7$일 때의 점 P의 좌표는 음수이다.

운동 방향을 바꿀 때 속도는 0이 된다.

2 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 x라고 하면 $x=t^3-9t^2+24t$의 관계식이 성립한다. 이때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시각을 구하여라.

(2) 점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때, 점 P의 가속도를 구하여라.

3 어떤 고무줄의 시각 t에서의 길이를 l이라고 하면 $l=t^2+5t+8$의 관계식이 성립한다. $t=2$일 때, 이 고무줄의 길이의 순간변화율을 구하여라.

4 수직선 위를 움직이는 점 P의 좌표 x가 시각 t의 함수 $x=t^4-3t^2+3$으로 나타날 때, 가속도가 0이 되는 순간의 t의 값을 구하여라.

5 10000 L의 물이 들어 있는 물탱크에서 50분 동안 밑바닥으로부터 물을 빼려고 한다. 물을 빼기 시작한 지 t분 후의 물탱크 안에 남아 있는 물의 부피를 $V(t)$ L라고 하면

$$V(t)=10000\left(1-\frac{t}{50}\right)^2 \ (0\le t\le 50)$$

의 관계식이 성립한다. 이때, 물을 빼기 시작한 지 10분 후 물탱크 안의 물의 부피의 변화율을 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 같은 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 좌표 x, y가 각각 시각 t의 함수

$$x=t^3-t^2,\ y=2t^2+kt$$

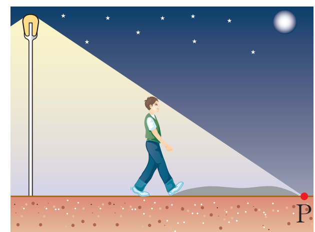
로 나타날 때, 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 때가 두 번 있도록 하는 상수 k값의 범위를 구하여라.

최고 높이에 도달한 순간 움직이던 물체의 속도는 0이 된다.

2 지면에서 24 m/s의 속도로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 지면으로부터의 높이를 $h(t)$라고 하면 $h(t)=24t-5t^2$의 관계식이 성립한다. 이때, 이 물체가 도달하는 최고 높이와 그 순간 물체의 가속도를 구하여라.

3 수직선 위를 움직이는 점 P의 좌표 x가 시각 t의 함수 $x=t^3-3t^2+4$로 나타날 때, $1\leq t\leq 3$의 범위에서 점 P의 속도의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

4 키가 1.8 m인 어떤 사람이 높이가 3 m인 가로등 밑에서 출발하여 매분 60 m의 속도로 똑바로 걸어가고 있다. 이 사람의 그림자 끝 부분이 움직이는 속도를 구하여라.



5 직선 궤도를 달리는 기차에서 제동을 건 후 t초 동안 움직인 거리를 x m라고 하면

$$x=26t-0.65t^2$$

의 관계식이 성립한다. 이때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 제동을 건 지 2초 후의 속도와 가속도를 구하여라.

(2) 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간과 움직인 거리를 구하여라.

Ⅱ 대단원 확인하기

계산

1 ★

함수 $f(x)=x^2+2x$에 대하여 닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서의 평균변화율과 $f'(a)$가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

추론

2 ★★

다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나눌 때의 나머지 $R(x)$는

$$R(x)=(x-a)f'(a)+f(a)$$

임을 보여라.

계산

3 ★★

함수 $f(x)$에서 $f'(a)=2$, $f(a)=3$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$

이해

4 ★★

점 $(-1,\ 0)$에서 곡선 $y=-x^2+k$에 그은 두 접선이 서로 직교할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

의사소통

5 ★

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq0)$이 극값을 갖기 위한 조건을 말하여라.

이해

6 ★★★

곡선 $y=x^2$과 점 $(3,\ 0)$ 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.

추론

7 ★★

다음 함수의 극한값을 구하고 그래프의 개형을 그려라.

(1) $y=x^3+x$ (2) $y=3x^4-5x^3$

추론

8 ★★★

$x\geq0$일 때, 다음 부등식이 항상 성립함을 보여라.

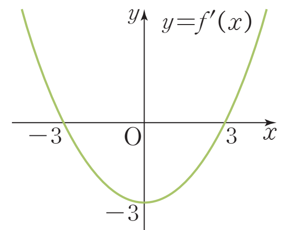
$$x^n-1\geq n(x-1)\ (\text{단, } n\geq2\text{인 정수})$$

의사소통

9 ★★★

삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(x)=kx$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 상수 k값의 범위를 말하여라.

(단, $f(0)=0$)



문제 해결

10 ★★

지상에서 30 m/s의 속도로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 높이를 x m라고 하면 $x=30t-5t^2$의 관계식이 성립한다. 이때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 물체를 쏘아 올린 지 2초 후의 물체의 속도와 가속도를 구하여라.

(2) 물체가 도달하는 최고 높이를 구하여라.

III 다항함수의 적분법

수원 화성이나 만리장성은 유네스코가 지정한 세계 문화유산이다.

이러한 성곽은 돌을 하나하나 쌓아 올려 축조한 것으로 적분의 개념이

들어 있는 실생활의 한 예이다.





미적분학에 기호 ∫을 도입한 라이프니츠

_Leibniz, G. W. ; 1646~1716



법률가 가정에서 태어난 라이프니츠는 15살에 라이프치히 대학교 법과 대학에 입학하였고, 철학에 흥미를 느껴 스콜라 철학과 데카르트 철학을 공부하였다. 특히 그는 데카르트의 철학에 깊이 공감하게 되면서 수학을 공부하였다.

그는 철학의 수학화라는 것에 착안하였는데 과학적 인식의 일반적인 방법을 언어나 기호를 써서 행하는 계산으로 바꾸어 놓고자 하였다. 이것이 이루어진다면 수학은 추론을 위한 논리적인 도구가 되며, 간단한 요소들의 상호 관계를 나타내는 과학이 될 것이라고 생각하였다.

1672년 라이프니츠는 파리에 가서 생활하게 되었는데 이때부터 수학에 대한 연구를 적극적으로 하게 되었다. 그는 기호를 만드는 것에 관심을 가지고 여러 가지 새로운 기호를 수학에 도입하였다. 1684년에 발표한 미분법에 대한 논문에서는 미분과 적분이 역연산 관계에 있다는 것을 설명하였고, 부정적분을 정적분으로부터 분리시켜 적분상수까지도 생각하였다.

1 부정적분과 정적분

학습 목표

- 부정적분의 뜻을 알고, 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.
- 정적분의 뜻을 알고, 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있다.

1. 부정적분 2. 정적분



뺄셈과 나눗셈은 각각 덧셈과 곱셈의 역연산이고, 다항식의 인수분해는 전개의 역과정이다. 미분과 적분 사이의 관계도 이와 유사하다. 드모르간(De Morgan, A. ; 1806~1871)은 이와 같은 미분과 적분의 관계를 일컬어 '적분은 미분의 회상'이라고 하였다.

이렇게 거꾸로 생각하는 역발상은 창의적 문제 해결력을 기르기 위한 중요한 도구이다.

부정적분과 정적분에 들어가기 전에

1. 곱셈 공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
③ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
④ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
⑤ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

1 다음을 전개하여라.
(1) $(2x+3)^2$
(2) $(2x-3)^2$
(3) $(x-1)(x+1)$
(4) $(x+1)^3$
(5) $(x-2)^3$

2. 극한의 기본 성질

수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 각각 α, β로 수렴할 때, 즉
$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

① $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n=k\alpha$ (단, k는 상수)
② $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$
③ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$
④ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

2 다음 극한값을 구하여라.
(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+n+1}$
(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3+n}$

3. 도함수

① 함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

② $(x^n)'=nx^{n-1}$ (단, n은 자연수)
③ 곱의 미분법
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

3 다음 함수의 도함수를 구하여라.
(1) $y=x^2$
(2) $y=x^3$
(3) $y=(x^2+1)(x-1)$
(4) $y=(x^2+1)^2$

4. 절댓값 기호를 포함한 식

① $|x|=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$
② $y=|f(x)|$의 그래프는 절댓값 기호 안의 $f(x)=0$을 기준으로 구간을 나누어 그린다.
(i) $f(x)\geq0$일 때, $y=f(x)$
(ii) $f(x)<0$일 때, $y=-f(x)$

4 다음 함수의 그래프를 그려라.
(1) $y=|x-1|$
(2) $y=|x^2+2x|$

1. 부정적분

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 부정적분의 뜻

① 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분 또는 원시함수라 하고, 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.

이때, 함수 $f(x)$를 피적분함수라고 한다.

② $F'(x)=f(x)$일 때, $\int f(x)dx=$ (1) ☐ $+C$로 나타낸다.

이때, 상수 C를 적분상수라고 한다.

| 보기 | $(x^2-x)'=2x-1$이므로 $\int(2x-1)dx=$ (2) ☐ $+C$

● x^n의 부정적분

n이 음이 아닌 정수일 때

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

| 보기 | (1) $\int x^5 dx=$ (3) ☐ x^6+C

(2) $\int x^6 dx=$ (4) ☐ x^7+C

● 부정적분의 성질

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

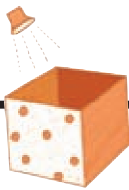
② $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

③ $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$



⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 86~91쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $F(x)$ (2) x^2-x (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{7}$



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(3x^2+8x)dx$

(2) $\int(x-2)(x+1)dx$

〔풀이〕

(1) $\int(3x^2+8x)dx$

$=3\int x^2dx+8\int x\,dx$

$=x^3+4x^2+C$

(2) $\int(x-2)(x+1)dx$

$=\int(x^2-x-2)dx$

$=\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$

| 스스로 하기 |

1. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(12x^3+2x)dx$

(2) $\int(x+1)(2-x)dx$

〔풀이〕

(1) $\int(12x^3+2x)dx$

$=12\int x^3dx+2\int x\,dx$

$=\square x^4+x^2+C$

(2) $\int(x+1)(2-x)dx$

$=\int(-x^2+x+\square)dx$

$=-\int x^2dx+\int x\,dx+\int\square\,dx$

$=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\square+C$

교과서 87쪽

1 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $3x^2+C$는 $\square$의 부정적분이다.

(2) $x^{\square}+C$는 $5x^4$의 부정적분이다.

교과서 88, 89, 91쪽

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 3\,dx$

(2) $\int 8x^3\,dx$

(3) $\int(4x^3+6x^2+1)dx$

(4) $\int(x+3)^2\,dx$



개념 넓히기

적분상수의 사용

부정적분 $\int(3x-1)^2dx$를 다음 두 가지 방법으로 구하여 보자.

(i) 미분을 이용하여 부정적분을 구하면

$\{(3x-1)^3\}'=3(3x-1)^2(3x-1)'=9(3x-1)^2$이므로

$$\begin{aligned}\int(3x-1)^2dx&=\frac{1}{9}(3x-1)^3+C_0\\&=\frac{1}{9}(27x^3-27x^2+9x-1)+C_0\\&=3x^3-3x^2+x-\frac{1}{9}+C_0\end{aligned}$$

(ii) 전개를 한 후 부정적분을 구하면

$(3x-1)^2=9x^2-6x+1$이므로

$$\begin{aligned}\int(3x-1)^2dx&=\int(9x^2-6x+1)dx\\&=9\int x^2dx-6\int x\,dx+\int 1\,dx\\&=(3x^3+C_1)-(3x^2+C_2)+(x+C_3)\\&=3x^3-3x^2+x+(C_1-C_2+C_3)\end{aligned}$$

이때, (i)에서 상수 부분은 $-\frac{1}{9}+C_0$이고, (ii)에서 상수 부분은 $C_1-C_2+C_3$으로 그 결과는 계산 방법에 따라 상수에서 차이가 난다.

그러나 이들 상수는 임의의 C로 표시하여도 된다. 즉

$$\int(3x-1)^2dx=3x^3-3x^2+x+C$$

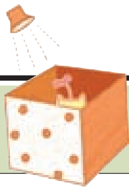
로 적는다.

확인학습

1 부정적분 $\int(2x+1)^3\,dx$를 다음 두 가지 방법으로 구하여라.

(1) 미분을 이용하여 부정적분 구하기

(2) 전개를 이용하여 부정적분 구하기



기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 □ 안에 알맞은 함수를 써넣어라.

(1) $\int \square \, dx = 2x^3 + C$

(2) $\int (\square) dx = x^4 - 2x^2 + x + C$

피적분함수를 전개하여 부정적분을 구한다.

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (x^2-2)(x+1)dx$　　(2) $\int (x^2+1)(2-x)dx$

3 다음 조건을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하여라.

(1) $f'(x) = x^3 + 1$, $f(0) = 1$

(2) $f'(x) = x(x-3)$, $f(-1) = 2$

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

4 함수 $y=f(x)$에 대하여 y의 증분 $\Delta y = 3x^2 \Delta x + 5(\Delta x)^2$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $f'(x)$　　(2) $f(x)$

(3) $f(0) = -1$일 때, $f(-3)$의 값



5 점 $(-1, -2)$를 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2x-3$이다. 이 곡선의 방정식을 구하여라.

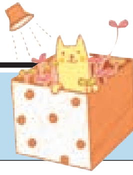
접선의 기울기가 $2x-3$이니까 $f'(x)=2x-3$ 이구나!



6 초속 30 m의 속도로 지면에서 똑바로 위로 쏘아 올린 물 로켓의 t초 후의 높이를 $F(t)$라 하고, t초 후의 속도를 $f(t)$라고 하면

$$F(t) = tf(t) + 4.9t^2$$

이라고 한다. $f(0) = 30$일 때, 함수 $F(t)$를 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (x+2)^2dx-\int (x-2)^2dx$

(2) $\int (x+1)^3dx+\int (x-1)^3dx$

(3) $\int x^2(2x+7)dx+\int (x+5)(-2x^2+3x+1)dx$

2 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\{f(x)+g(x)\}'=2x+1,\ \{f(x)g(x)\}'=3x^2-2x+2$$

가 성립하고 $f(0)=2$, $g(0)=-1$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $f(x)+g(x)$ (2) $f(x)g(x)$ (3) $f(x)$, $g(x)$

다항함수 $f(x)$와 그 부정적분 $F(x)$의 차수를 살펴보렴~.



3 다항함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, 다음을 만족하는 함수 $f(x)$를 각각 구하여라.

(1) $F(x)=f(x)+x^3$

(2) $3F(x)=xf(x)-f(x)$, $f(0)=1$

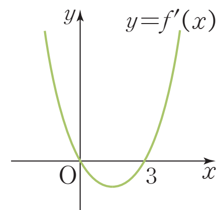
4 연속함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1) \\ 2x & (-1<x<1) \\ -1 & (x>1) \end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지난다. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려라.

$y=f'(x)$의 그래프가 주어져 있으므로 이를 이용하여 $f(x)$의 식을 구할 수 있다.

5 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같은 포물선이고, $f(x)$의 극댓값이 5, 극솟값이 -4일 때, 함수 $f(x)$를 구하여라.



2. 정적분

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

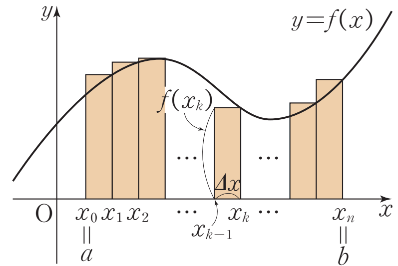
정적분의 뜻

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 다음을 함수 $y=f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라고 한다.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$\left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

여기서 a를 정적분의 아래끝, b를 (1) ☐ 이라고 한다.



정적분의 기본 정리

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-\text{(2) ☐}$$

| 참고 | 함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $a\le x\le b$일 때

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt\text{이면}\qquad S'(x)=f(x)$$

정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

① $\int_a^a f(x)dx=$ (3) ☐, $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

② $\int_a^b kf(x)dx=$ (4) ☐ $\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

③ $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

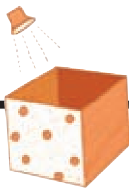
④ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

⑤ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$



⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 92~104쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 위끝 (2) $F(a)$ (3) 0 (4) k



바 탕 다 지 기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함 께 하 기 |

1. 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{2}(2x^3-3x^2+2x-4)dx$

(2) $\int_{1}^{3}(x-1)(x+2)dx$

〔풀이〕

(1) $\int_{1}^{2}(2x^3-3x^2+2x-4)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4-x^3+x^2-4x\right]_1^2$

$=\left(\frac{1}{2}\cdot2^4-2^3+2^2-4\cdot2\right)$

$-\left(\frac{1}{2}-1+1-4\right)$

$=-\frac{1}{2}$

(2) $\int_{1}^{3}(x-1)(x+2)dx$

$=\int_{1}^{3}(x^2+x-2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^3$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot3^3+\frac{1}{2}\cdot3^2-2\cdot3\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$

$=\frac{26}{3}$

| 스 스 로 하 기 |

1. 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{2}^{3}(3x^2-x-1)dx$

(2) $\int_{1}^{3}(2x+1)(x-2)dx$

〔풀이〕

(1) $\int_{2}^{3}(3x^2-x-1)dx$

$=\left[x^3-\square x^2-x\right]_2^3$

$=\left(3^3-\square\cdot3^2-3\right)-\left(2^3-\square\cdot2^2-2\right)$

$=\square$

(2) $\int_{1}^{3}(2x+1)(x-2)dx$

$=\int_{1}^{3}(2x^2-\square x-2)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3-\square x^2-2x\right]_1^3$

$=\left(\frac{2}{3}\cdot3^3-\square\cdot3^2-2\cdot3\right)$

$-\left(\frac{2}{3}-\square-2\right)$

$=\square$

교과서 102, 104쪽

1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-3}^{3}(x^2-2x+3)dx$

(2) $\int_{1}^{3}(2y-1)dy$

(3) $\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)dx$

(4) $\int_{-1}^{2}(x^2-3x)dx+\int_{4}^{3}x(3-x)dx-\int_{3}^{2}x(x-3)dx$



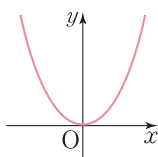
개 념 넓 히 기

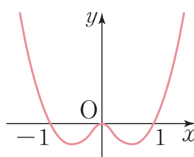
우함수와 기함수의 정적분

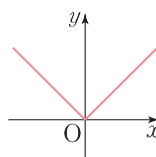
(1) 우함수와 기함수의 정의

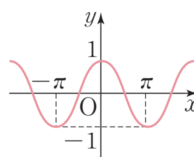
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$일 때, $y=f(x)$를 우함수 또는 짝수 함수라고 한다. 이때, $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 예를 들어 다음과 같은 함수는 우함수이다.

① $y=x^2$ ② $y=x^4-x^2$ ③ $y=|x|$ ④ $y=\cos x$



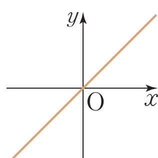


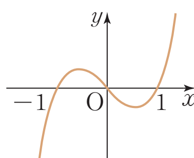


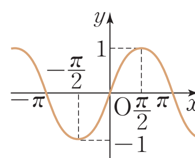


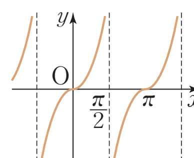
또 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$일 때, $y=f(x)$를 기함수 또는 홀수 함수라고 한다. 이때, $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 예를 들어 다음과 같은 함수는 기함수이다.

① $y=x$ ② $y=x^3-x$ ③ $y=\sin x$ ④ $y=\tan x$









(2) 우함수와 기함수의 정적분

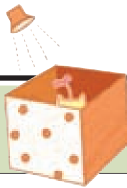
함수 $y=f(x)$가 구간 $[-a,\ a]$에서 연속일 때

(i) 함수 $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(ii) 함수 $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

| 참고 | 우함수와 기함수의 정적분은 위끝과 아래끝의 절댓값이 같을 때 사용하면 편리하다.

확 인 학 습 **1** 우함수와 기함수를 이용하여 정적분 $\int_{-2}^{2}(6x^5+2x^3+4x^2-1)dx$를 구하여라.



기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.



1 다음 함수를 x에 대하여 미분하여라.

(1) $\int_{-2}^{x}(3t^2-4t-5)dt$　　(2) $\int_{2}^{x}(t-2)(t+3)dt$

2 등식 $\int_{1}^{2}(4x^3-ax+1)dx=0$을 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

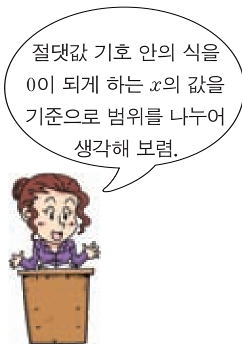
3 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\le1) \\ -x^2+3x & (x\ge1) \end{cases}$일 때, 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^{1}f(x)dx$　　(2) $\int_{0}^{2}f(x)dx$

4 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}(t^2-2t-1)dt$

(2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}(t^2+2t+4)dt$



5 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{3}|x-2|dx$　　(2) $\int_{0}^{4}|x-1|dx$

(3) $\int_{-2}^{3}|x^2-x-2|dx$　　(4) $\int_{-2}^{1}(x|x|-2)dx$



실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 임의의 실수 x에 대하여 다음 등식을 만족하는 함수 $y=f(x)$와 양수 a의 값을 각각 구하여라.

(1) $\int_a^x f(t)dt=x^2-2x-3$

(2) $\int_a^x f(t+1)dt=x^3+x^2-x-a$

2 구분구적법을 이용하여 다음을 구하여라.

(1) 곡선 $y=x^3$과 x축 및 $x=a\,(a>0)$로 둘러싸인 도형의 넓이

(2) 반지름의 길이가 r인 반구의 부피

이차항의 계수가 a이고, 두 근이 α, β인 이차방정식은
$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

3 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 할 때, $\int_\alpha^\beta (x^2-4x+2)dx$의 값을 구하여라.

4 정적분 $\int_0^2 |x-a|dx$의 값을 $f(a)$라고 할 때, $f(a)$가 최소가 되게 하는 상수 a의 값을 구하여라. (단, $0\le a\le 2$)

5 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\frac{2}{n}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)}{(1+2+3+\cdots+n)(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)}$

(2) 분모, 분자를 n^7으로 나누어 정적분 4개로 고쳐 본다.

2 정적분의 활용

학습 목표

- 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
- 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

1. 정적분의 활용



아르키메데스(Archimedes ; B. C. 287～B. C. 212)는 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 동일한 밑변과 동일한 높이를 가진 삼각형의 넓이의 $\frac{4}{3}$배임을 발견하였다.

한편 이탈리아의 수학자 카발리에리(Cavalieri, F. B. ; 1598～1647)는 경계선으로 둘러싸인 두 평면도형 S, S'을 하나의 정해진 직선과 평행한 직선으로 자를 때, S, S'의 내부에 있는 잘린 부분의 길이의 비가 항상 $m : n$이면 평면도형 S, S'의 넓이의 비도 $m : n$이 됨을 발견하였다.

아르키메데스와 카발리에리는 이러한 사실을 발견하는 데 많은 시간이 걸렸으나 정적분을 이용하면 이를 쉽게 확인할 수 있다.

정적분의 활용에 들어가기 전에

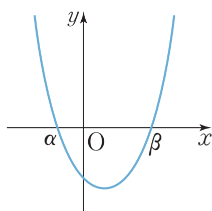
1. 두 함수의 그래프의 교점

① 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축$(y=0)$과의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=0$의 해와 같다.

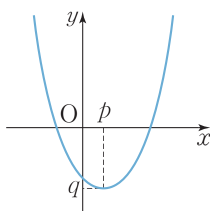
② 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 해와 같다.

2. 여러 가지 함수의 그래프

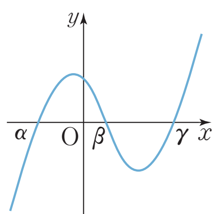
① $y=(x-\alpha)(x-\beta)$
(단, $\alpha<\beta$)



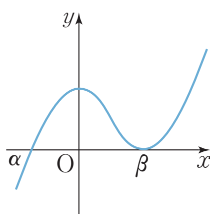
② $y=(x-p)^2+q$
(단, $p>0$, $q<0$)



③ $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
(단, $\alpha<\beta<\gamma$)



④ $y=(x-\alpha)(x-\beta)^2$
(단, $\alpha<\beta$)



3. 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 x가 $x=f(t)$로 주어질 때

① 속도: $v(t)=\dfrac{dx}{dt}$

② 가속도: $a(t)=\dfrac{dv}{dt}$

1 다음 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 구하여라.

(1) $y=x^2$, $y=x+2$

(2) $y=x^2+2x$, $y=3$

2 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=x^2-2x-3$

(2) $y=x^2-4x+5$

(3) $y=(x-1)(x+1)(x+2)$

(4) $y=x^3-x^2-x+1$

3 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표가

$$x=t^3-2t^2+5t-3$$

으로 주어질 때, 시각 $t=2$에서의 속도와 가속도를 구하여라.

1. 정적분의 활용

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

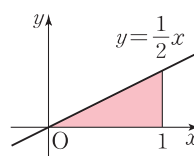
곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

| 보기 | $y=\frac{1}{2}x$와 x축 및 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx=\boxed{(1)}$$



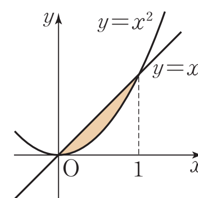
두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

| 보기 | 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 (x-x^2)dx=\boxed{(2)}$$



수직선 위의 물체의 운동

수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0이면

① 시각 t에서의 물체의 위치: $x(t)=\boxed{(3)}+\int_a^t v(t)dt$

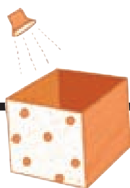
② 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체의 위치의 변화량: $\int_a^b \boxed{(4)}\,dt$

③ 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리: $\int_a^b |v(t)|dt$



···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 108~116쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) x_0 (4) $v(t)$



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 곡선 $y=(x+1)(3-x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

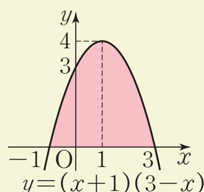
〔풀이〕

주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$(x+1)(3-x)=0$

에서

$x=-1,\ x=3$



구간 $[-1,\ 3]$에서 $y\geq0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{3}(x+1)(3-x)dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}$$

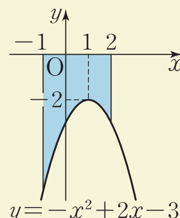
| 스스로 하기 |

1. 곡선 $y=-x^2+2x-3$과 x축 및 두 직선 $x=-1,\ x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

〔풀이〕

주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같다.

이때, 구간 $[-1,\ 2]$에서 $y\leq0$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-1}^{\square}(x^2-2x+3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-1}^{\square}=\square$$

교과서 110쪽

1 다음 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x(x-1)$　　(2) $y=-x(x-2)$

교과서 112쪽

2 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-1,\ y=x+1$　　(2) $y=x^3,\ y=x$

교과서 115쪽

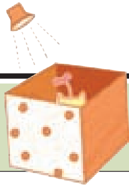
3 수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하면

$$v(t)=-t^2+4t-3$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 물체의 위치의 변화량

(2) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 물체가 움직인 거리



기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x(x+2)(x-1)$ (2) $y=x^3-2x^2+x$

(3) $y=x^3-2x^2-x+2$ (4) $y=x^4-3x^3+2x^2$

2 다음 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

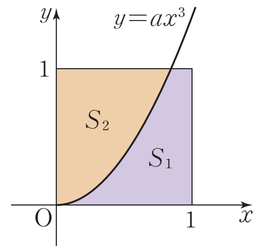
(1) $y=x^2-4x+5,\ y=-x^2+6x-3$

(2) $y=x^3-x^2,\ y=x^2$

나누어진 두 부분의 넓이가 같으니까 S_1의 넓이는 사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이겠네!



3 오른쪽 그림과 같이 네 직선 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$로 둘러싸인 정사각형을 곡선 $y=ax^3$이 두 부분 S_1, S_2로 나눌 때, S_1과 S_2의 넓이가 같아지도록 상수 a의 값을 정하여라.



오류 피하기
$v(0)=55$임에 주의한다.

4 지면으로부터 높이가 55 m인 곳에서 똑바로 위로 던진 물체의 시각 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면 $v(t)=50-10t$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 6초 후의 지면으로부터 물체까지의 높이

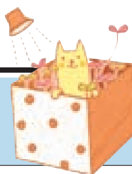
(2) 최고점에 도달하였을 때의 지면으로부터 물체까지의 높이

(3) 지면에 떨어지는 순간의 물체의 속도

(4) 던진 후 2초부터 8초까지 물체가 움직인 거리

(2) 최고점에 도달하였을 때 $v(t)=0$ 이다.

5 직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)=(1-|t-1|)^3$이고, 시각 $t=0$일 때의 점 P의 위치가 2일 때, 시각 $t=1$과 $t=1.5$에서의 점 P의 위치를 각각 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

두 부분의 넓이가 같아지려면 전체의 정적분의 값은 어떻게 될까?



1 $0<a<1$에서 곡선 $y=x(x-a)(x-1)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $S(a)$를 a에 대한 식으로 나타내어라.

(2) $S(a)$가 최소일 때의 a의 값을 구하여라.

(3) 주어진 도형의 x축의 위쪽 부분과 아래쪽 부분의 넓이가 같아지도록 a의 값을 정하여라.

2 다음 물음에 답하여라.

(1) 곡선 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$와 직선 $y=mx+n$이 두 점에서 만날 때, 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라고 하면, 이 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이 $S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$임을 증명하여라.

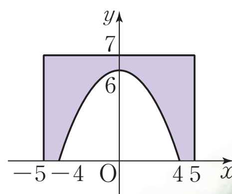
(2) (1)을 이용하여 곡선 $y=2x^2-4x-2$와 직선 $y=-2x+2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

3 원점을 동시에 출발하여 x축 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도 $v_1(t)$, $v_2(t)$는 각각

$$v_1(t)=1-2t,\ v_2(t)=3t^2-1$$

이라고 한다. 두 점 P, Q의 중점을 R라고 할 때, 점 R가 다시 원점을 지날 때까지 걸리는 시간을 구하여라.

4 오른쪽 그림과 같이 아치의 모양이 포물선인 다리가 있다. 아치의 높이가 6 m, 폭이 8 m일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



Ⅲ 대단원 확인하기

이해

1 ★★

함수 $f(x)=\int(1+3x+5x^2)dx$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값을 구하여라.

계산

2 ★

함수 $f(x)=-x^2+4x$에 대하여 $\int_2^4 f(x)dx-\int_3^4 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하여라.

계산

3 ★★

다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^{1} x(1+3x)^2dx$

(2) $\int_1^3 (x-1)(x-2)^2(x-3)dx$

이해

4 ★★

연속함수 $y=f(x)$에 대하여 $xf(x)=\frac{2}{3}x^3+\int_0^x f(t)dt$가 성립하고 $f(0)=0$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

이해

5 ★★

함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^1 f(x)dx=1,\ \int_0^1 xf(x)dx=2$$

가 성립할 때, 정적분 $\int_0^1 (x-k)^2f(x)dx$의 값이 최소가 되도록 실수 k의 값을 정하여라.

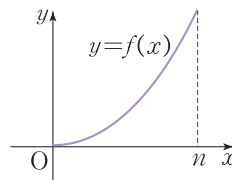
의사소통

6 ★★

$0\le x\le n$에서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때,

$A=\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$, $B=\sum_{k=1}^{n} f(k)$, $C=\int_0^n f(x)dx$라고 하자.

A, B, C의 대소 관계를 말하여라.



이해

7 ★★

다음 곡선과 직선 또는 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-2x$, $y=x-2$

(2) $y=x^3-x$, $y=x^2-1$

창의성

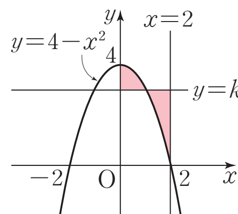
8 ★★★

함수 $f(x)=x^3-x^2+x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

이해

9 ★★★

오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 2]$에서 곡선 $y=4-x^2$과 y축 및 두 직선 $y=k$, $x=2$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.



문제 해결

10 ★★

직선 궤도를 매초 30 m의 속도로 달리는 열차가 있다. 브레이크를 걸고 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s라고 하면

$$v(t)=30-\frac{3}{2}t$$

일 때, 브레이크를 건 후 완전히 정지할 때까지 걸린 시간과 달린 거리를 구하여라.



IV 확률

땀과 눈물의 결정체인 운동경기의 결과에는

우연성도 숨어 있다.

그러나 성공은 우연히 찾아오는 것이 아니라

각고의 노력 끝에 찾아낸 필연의 산물이다.





확률론의 정립자 콜모고로프

_Kolmogorov, A. N ; 1903~1987



콜모고로프는 그의 논문 「확률론의 기초 개념 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1933)」에서 기본적인 공리를 도입하여 확률론의 체계를 정립하였다.

이것은 힐베르트(Hilbert, D. ; 1862~1943)가 1901년 제1회 국제 수학자 대회에서 언급한 확률 부분에 대한 문제를 부분적으로 해결하는 이론으로 그의 대표적인 업적이다.

또 1938년에는 마르코프 이론에 대한 기초를 마련하여 확률론에서의 해석적 방법을 발표하였다.

러시아에서 가장 유명한 영재 학교의 이름이 '콜모고로프 수학 학교' 인데, 이것은 콜모고로프의 업적을 기리기 위하여 그의 이름을 붙인 것이다. 그는 말년에 이 학교의 교장으로 재직하면서 수학 교육의 발전에 기여하였다.

1 조합

학습 목표
- 중복조합의 뜻을 알고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
- 이항정리의 뜻과 그 성질을 이해할 수 있다.

1. 중복조합 2. 이항정리

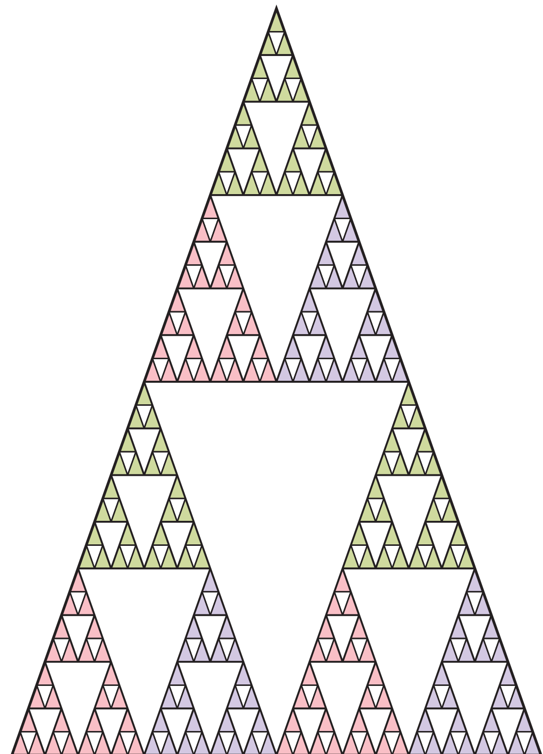
다항식 $(a+b)^n$을 전개할 때에 각 항의 계수 사이에서 규칙을 찾을 수 있다. 이러한 규칙성을 나타낸 것으로 널리 알려진 것이 파스칼(Pascal, B. ; 1623～1662)의 삼각형이다.

이에 앞서 동양에서는 송나라 시대에 가헌(賈憲 ; 1010～1070)이라는 사람에 의해 같은 규칙이 발견되었다. 가헌이 발견한 규칙은 주세걸(朱世傑 ; 1270～1330)이 쓴 '사원옥감(四元玉鑑)'이라는 책에 실려 있다.

아래의 | 그림1 | 은 사원옥감에 실려 있는 가헌의 삼각형이고, | 그림2 | 는 파스칼의 삼각형에서 홀수가 쓰여진 칸을 색칠하여 만든 시어핀스키(Sierpinski)의 삼각형이다.



| 그림1 |



| 그림2 |

조합에 들어가기 전에

1. 합의 법칙

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고, A, B가 동시에 일어나지 않을 때, A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

2. 곱의 법칙

사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, A, B가 함께 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

3. 순열

① 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 순서대로 배열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

② ${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

③ ${}_n\mathrm{P}_n=n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$

④ $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$

4. 조합

① 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

② ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

③ ${}_n\mathrm{C}_0=1$, ${}_n\mathrm{C}_n=1$

④ ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

1 어느 식당의 점심 메뉴로 한식이 4종류, 양식이 5종류 준비되어 있다. 점심 메뉴 한 종류를 택하는 경우의 수를 구하여라.

2 60의 양의 약수의 개수를 구하여라.

3 남학생 3명, 여학생 3명을 일렬로 세우려고 한다. 다음 경우의 수를 구하여라.

(1) 여학생 3명이 서로 이웃하는 경우

(2) 남학생이 양 끝에 서는 경우

4 9명을 다음과 같이 세 모둠으로 나누는 경우의 수를 구하여라.

(1) 4명, 3명, 2명

(2) 6명, 2명, 1명

1. 중복조합

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 중복조합의 뜻과 중복조합의 수

① 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라고 한다.

② 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_{n+r-1}C_r$이다.

| 보기 | (1) 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_{3+5-1}C_{\boxed{(1)}}={}_{7}C_{\boxed{(2)}}$$

(2) 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_{5+3-1}C_{\boxed{(3)}}={}_{7}C_{\boxed{(4)}}$$

개념 넓히기 **중복조합의 수 ${}_{n+r-1}C_r$를 유도하기**

n개의 수 1, 2, 3, …, n 중에서 r개의 수를 택하는 중복조합을 수의 크기의 순서로 정리하면		왼쪽의 각 조합의 첫 번째 수에 0, 두 번째 수에 1, 세 번째 수에 2, …, r번째 수에 $r-1$을 각각 더하면
1, 1, 1, …, 1	→	1, 2, 3, …, r
1, 1, 1, …, 2	→	1, 2, 3, …, $r+1$
⋮		⋮
2, 2, 2, …, 2	→	2, 3, 4, …, $r+1$
⋮		⋮
n, n, n, …, $n-1$	→	n, $n+1$, $n+2$, …, $n+r-2$
n, n, n, …, n	→	n, $n+1$, $n+2$, …, $n+r-1$

여기서 왼쪽의 조합 전체의 집합과 오른쪽의 조합 전체의 집합은 일대일 대응이므로 그 원소의 개수는 서로 같다. 그런데 오른쪽 조합은 서로 다른 $(n+r-1)$개의 수에서 r개의 수를 택하는 조합이므로 그 수는 ${}_{n+r-1}C_r$이다.

따라서 n개의 수에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_{n+r-1}C_r$이다.



···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 122~124쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 5 (2) 5 (또는 2) (3) 3 (4) 3 (또는 4)



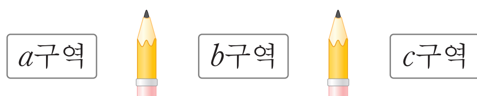
개념 넓히기

지우개와 연필의 배열로 알아보는 중복조합의 수

3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 5개를 뽑는 경우에 대하여 생각해 보자.

예를 들어 a를 2개, b를 2개, c를 1개 뽑았다면 ➡ a, a, b, b, c
a를 0개, b를 4개, c를 1개 뽑았다면 ➡ b, b, b, b, c
a를 5개, b를 0개, c를 0개 뽑았다면 ➡ a, a, a, a, a

여기서 각 경우에 있는 a, b, c를 구별하기 위하여 다음과 같이 연필로 구역을 만들어 보자.



이제 a구역, b구역, c구역에 a, b, c의 개수만큼 지우개를 늘어놓아 보자.







이러한 배열에서 다음을 알 수 있다.

(i) 연필의 개수는 문자의 종류 수보다 1만큼 작다.

(ii) 지우개의 개수는 중복을 허용하여 뽑는 문자의 개수와 같다.

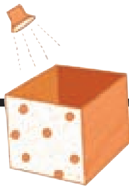
(iii) 구하는 경우의 수는 연필 2개와 지우개 5개를 늘어놓을 때 지우개가 위치하는 곳을 찾는 조합의 수이므로 ${}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5$이다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 다음과 같이 구한다.

❶ $(n-1)$개의 연필로 n개의 구역을 만든다.

❷ r개의 지우개를 n개의 구역에 배열한다.

❸ 구하는 경우의 수는 $(n+r-1)$개에서 r개를 택하는 조합의 수인 ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이다.



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 4개를 택하는 중복조합의 수를 구하여라.

(풀이)

서로 다른 6개에서 4개를 택하는 중복조합이므로

$${}_{6+4-1}C_4 = {}_9C_4$$
$$= 126(\text{가지})$$

2. 농구공, 축구공, 배구공의 세 종류의 공에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 경우의 수를 구하여라.

(풀이)

서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합이므로

$${}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7$$
$$= {}_9C_2 = 36(\text{가지})$$

| 스스로 하기 |

1. 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 2개를 택하는 중복조합의 수를 구하여라.

(풀이)

서로 다른 4개에서 $\square$개를 택하는 중복조합이므로

$${}_{4+\square-1}C_2 = {}_{\square}C_2$$
$$= \square(\text{가지})$$

2. 빨간색, 파란색, 노란색의 세 종류의 구슬에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 경우의 수를 구하여라.

(풀이)

서로 다른 3개에서 $\square$개를 택하는 중복조합이므로

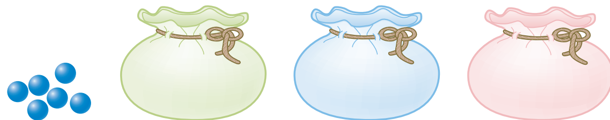
$${}_{3+\square-1}C_6 = {}_{\square}C_6$$
$$= {}_{\square}C_2 = \square(\text{가지})$$

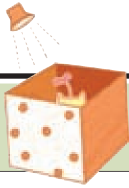
교과서 124쪽

1 다항식 $(a+b+c)^5$을 전개할 때 생기는 항의 개수를 구하여라.

교과서 124쪽

2 파란색 구슬 6개를 서로 다른 세 주머니에 넣는 경우의 수를 구하여라.





기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 4장의 카드 1, 2, 3, 4 에서 중복을 허용하여 5장을 택하는 경우의 수를 구하여라.

2 다음 식을 전개할 때 생기는 항의 개수를 구하여라.

(1) $(a+b+c)^7$ (2) $(a+b+c+d)^7$

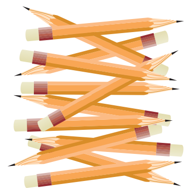
x, y, z를 9번 택하는 중복조합의 수로 생각할 수 있다.

3 방정식 $x+y+z=9$를 만족하는 x, y, z의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.

각 학생들에게 먼저 연필 한 자루씩을 나누어 줘봐~.



4 똑같은 연필 12자루를 네 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라. (단, 모든 학생은 적어도 한 자루의 연필을 받는다.)

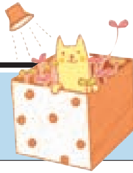


무기명 투표는 이름을 밝히지 않고 하는 투표이다. 무기명 투표의 경우는 중복조합으로 생각할 수 있다.

5 어느 동아리 회장 선거에 3명이 출마하였다. 투표를 할 회원이 모두 15명이고, 이들 각각이 무기명으로 후보자 한 명을 적어낼 때, 투표 결과의 경우의 수를 구하여라.

(단, 기권과 무효는 없다.)





실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.



1 12개의 과일을 담을 수 있는 바구니 한 개가 있다. 세 종류의 과일을 섞어서 바구니에 12개를 채우는 경우의 수를 구하여라.

2 사과 5개와 배 5개를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.
(단, 모든 사람이 사과 또는 배를 적어도 1개씩 받는다.)

3 방정식 $x+y+z=10$을 만족하는 x, y, z에 대하여 다음을 구하여라.

(1) x, y, z의 음이 아닌 정수해의 개수

(2) x, y, z의 양의 정수해의 개수

(3) $x\geq1$, $y\geq2$, $z\geq3$을 만족하는 정수해의 개수

4 양의 부호 '+' 6개와 음의 부호 '−' 8개를 일렬로 배열할 때, 부호의 변화가 4번 생기는 경우의 수를 구하여라.

5 집합 $A=\{1, 2, 3\}$에서 집합 $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$로의 함수 $f: A \longrightarrow B$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 집합 A의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a)<f(b)$를 만족하는 함수 f를 만드는 경우의 수

(2) 집합 A의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a)\leq f(b)$를 만족하는 함수 f를 만드는 경우의 수

(1)은 중복을 허용하지 않지만 (2)는 중복을 허용한다.

2. 이항정리

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

이항정리

① 두 개의 항으로 이루어진 $(a+b)$의 거듭제곱, 즉 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 이항정리라고 한다.

② n이 자연수일 때

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}\boxed{(1)\quad}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

이때, 각 항의 계수

$${}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n$$

을 이항계수라 하고, $(r+1)$번째 항 ${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$을 일반항이라고 한다.

| 보기 | (1) $(a+b)^6={}_6\mathrm{C}_0a^6+{}_6\mathrm{C}_1a^5b+{}_6\mathrm{C}_2a^4b^2+{}_6\mathrm{C}_3a^3b^3+{}_6\mathrm{C}_4a^2b^4+{}_6\mathrm{C}_5ab^5+{}_6\mathrm{C}_6b^6$

(2) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r(x^2)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r(-1)^rx^{12-3r}$$

이항정리의 성질

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$임을 이용하면 다음을 알 수 있다.

① $x=1$을 대입하면

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{\boxed{(2)}}$$

② $x=-1$을 대입하면

$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=\boxed{(3)\quad}$$

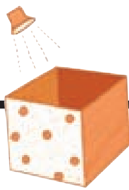
③ n이 홀수일 때

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{\boxed{(4)\quad}}$$



⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 125~128쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) b^r (2) n (3) 0 (4) $n-1$



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+3)^4$　　　(2) $(x-1)^5$

[풀이]

(1) $(x+3)^4$

$={}_4C_0\,x^4+{}_4C_1\,x^3\cdot 3+{}_4C_2\,x^2\cdot 3^2$

$+{}_4C_3\,x\cdot 3^3+{}_4C_4\cdot 3^4$

$=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$

(2) $(x-1)^5$

$={}_5C_0\,x^5+{}_5C_1\,x^4(-1)+{}_5C_2\,x^3(-1)^2$

$+{}_5C_3\,x^2(-1)^3+{}_5C_4\,x(-1)^4$

$+{}_5C_5(-1)^5$

$=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$

2. 다음 식의 값을 2^n의 꼴로 나타낼 때, n의 값을 구하여라.

$${}_{12}C_0+{}_{12}C_1+{}_{12}C_2+\cdots+{}_{12}C_{11}+{}_{12}C_{12}$$

[풀이]

다항식 $(1+x)^{12}$을 전개하면

$(1+x)^{12}={}_{12}C_0+{}_{12}C_1\,x+{}_{12}C_2\,x^2+\cdots$

$+{}_{12}C_{11}\,x^{11}+{}_{12}C_{12}\,x^{12}$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{12}={}_{12}C_0+{}_{12}C_1+{}_{12}C_2+\cdots+{}_{12}C_{12}$

$\therefore n=12$

| 스스로 하기 |

1. 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+2)^4$　　　(2) $(x-2)^5$

[풀이]

(1) $(x+2)^4$

$={}_4C_0\,x^4+{}_4C_1\,x^3\cdot 2+{}_4C_2\,x^2\cdot 2^2$

$+{}_4C_3\,x\cdot 2^3+{}_4C_4\cdot 2^4$

$=x^4+\square x^3+\square x^2+\square x+\square$

(2) $(x-2)^5$

$={}_5C_0\,x^5+{}_5C_1\,x^4(-2)+{}_5C_2\,x^3(-2)^2$

$+{}_5C_3\,x^2(-2)^3+{}_5C_4\,x(-2)^4$

$+{}_5C_5(-2)^5$

$=x^5-\square x^4+\square x^3-\square x^2$

$+\square x-32$

2. 다음 식의 값을 2^n의 꼴로 나타낼 때, n의 값을 구하여라.

$${}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{14}+{}_{15}C_{15}$$

[풀이]

다항식 $(1+x)^{15}$을 전개하면

$(1+x)^{15}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1\,x+{}_{15}C_2\,x^2+\cdots$

$+{}_{15}C_{14}\,x^{14}+{}_{15}C_{15}\,x^{15}$

이 등식의 양변에 $x=\square$을 대입하면

$2^{\square}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15}$

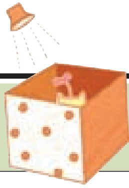
$\therefore n=\square$

교과서 127쪽

1 다항식 $(x+y)^{10}$의 전개식에서 x^5y^5의 계수를 구하여라.

교과서 128쪽

2 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=256$일 때, 자연수 n의 값을 구하여라.



기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

$(a+b)^n$의 일반항은 ${}_nC_r a^{n-r}b^r$이다.

1 $\left(ax-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 -80일 때, 실수 a의 값을 구하여라.

전개식의 일반항을 이용하여 상수항을 구한다.

2 다음 식의 전개식에서 상수항을 구하여라.

(1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

(2) $(x^2+1)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$

3 다음 부등식을 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

$$2048 \le {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n < 4096$$

$(1+x)^{10}$의 전개식에 $x=2$를 대입해 보렴.



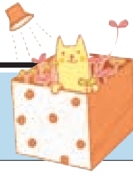
4 ${}_{10}C_0 + 2{}_{10}C_1 + 2^2{}_{10}C_2 + \cdots + 2^{10}{}_{10}C_{10}$의 값을 구하여라.

5 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\log_2({}_{99}C_0 + {}_{99}C_1 + {}_{99}C_2 + \cdots + {}_{99}C_{99})$

(2) $\log_2({}_{49}C_1 + {}_{49}C_3 + {}_{49}C_5 + \cdots + {}_{49}C_{49})$

6 집합 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 15\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수를 구하여라.



실력 키우기

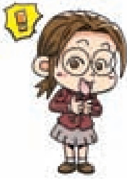
*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 다음 식의 전개식에서 [ ] 안의 계수를 구하여라.

(1) $(1+x)^3(2+x)^4$ $[x]$

(2) $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$ $[x^2]$

21^{21}을 $(20+1)^{21}$으로 놓고 이항정리를 이용하면 되겠구나!



2 21^{21}을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

3 $a_n={}_nC_0+\frac{1}{3}{}_nC_1+\left(\frac{1}{3}\right)^2{}_nC_2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n{}_nC_n$일 때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

$(1+x)^n$의 전개식에서 미분을 이용한다.

4 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots+n{}_nC_n=n\cdot 2^{n-1}$$

똑같은 상품과 서로 다른 상품이 각각 뽑히는 개수에 따른 경우의 수를 구해 본다.

5 10개의 똑같은 상품과 21개의 서로 다른 상품을 합하여 모두 31개의 상품이 있다. 이 중에서 10개를 뽑는 서로 다른 경우의 수를 구하여라.

6 10개의 원소로 된 집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}\}$에 대하여 A의 부분집합 중 a_1을 포함하고 원소의 개수가 n개인 부분집합의 개수를 $f(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$이라고 할 때

$$f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)$$

의 값을 구하여라.

프로젝트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

여러 가지 이항계수의 합 구하기

이항계수의 합에는 다음과 같은 성질이 있다.

❶ ${}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{2}={}_{n+1}C_{3}$

❷ ${}_{3}C_{3}+{}_{4}C_{3}+{}_{5}C_{3}+\cdots+{}_{n}C_{3}={}_{n+1}C_{4}$

| 증명 | $(1+x)^2$의 전개식에서 x^2의 계수 ➡ ${}_{2}C_{2}$

$(1+x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수 ➡ ${}_{3}C_{2}$

$(1+x)^4$의 전개식에서 x^2의 계수 ➡ ${}_{4}C_{2}$

⋮

$(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^2의 계수 ➡ ${}_{n}C_{2}$

한편, $x>0$일 때

$$(1+x)^2+(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^n=\frac{(1+x)^2\{(1+x)^{n-1}-1\}}{(1+x)-1}$$
$$=\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^2}{x}$$

따라서 ${}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{2}$는 $\dfrac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^2}{x}$ 의 전개식에서 x^2의 계수 ${}_{n+1}C_{3}$과 같으므로

$${}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{2}={}_{n+1}C_{3}$$

같은 방법으로 $(1+x)^k$ $(k=3,\ 4,\ \cdots,\ n)$의 전개식에서 x^3의 계수를 각각 구하여 그 합과 $(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^3의 계수를 비교하면

$${}_{3}C_{3}+{}_{4}C_{3}+{}_{5}C_{3}+\cdots+{}_{n}C_{3}={}_{n+1}C_{4}$$

| 문제 | 위의 사실을 이용하여 다음을 구하여 보자.

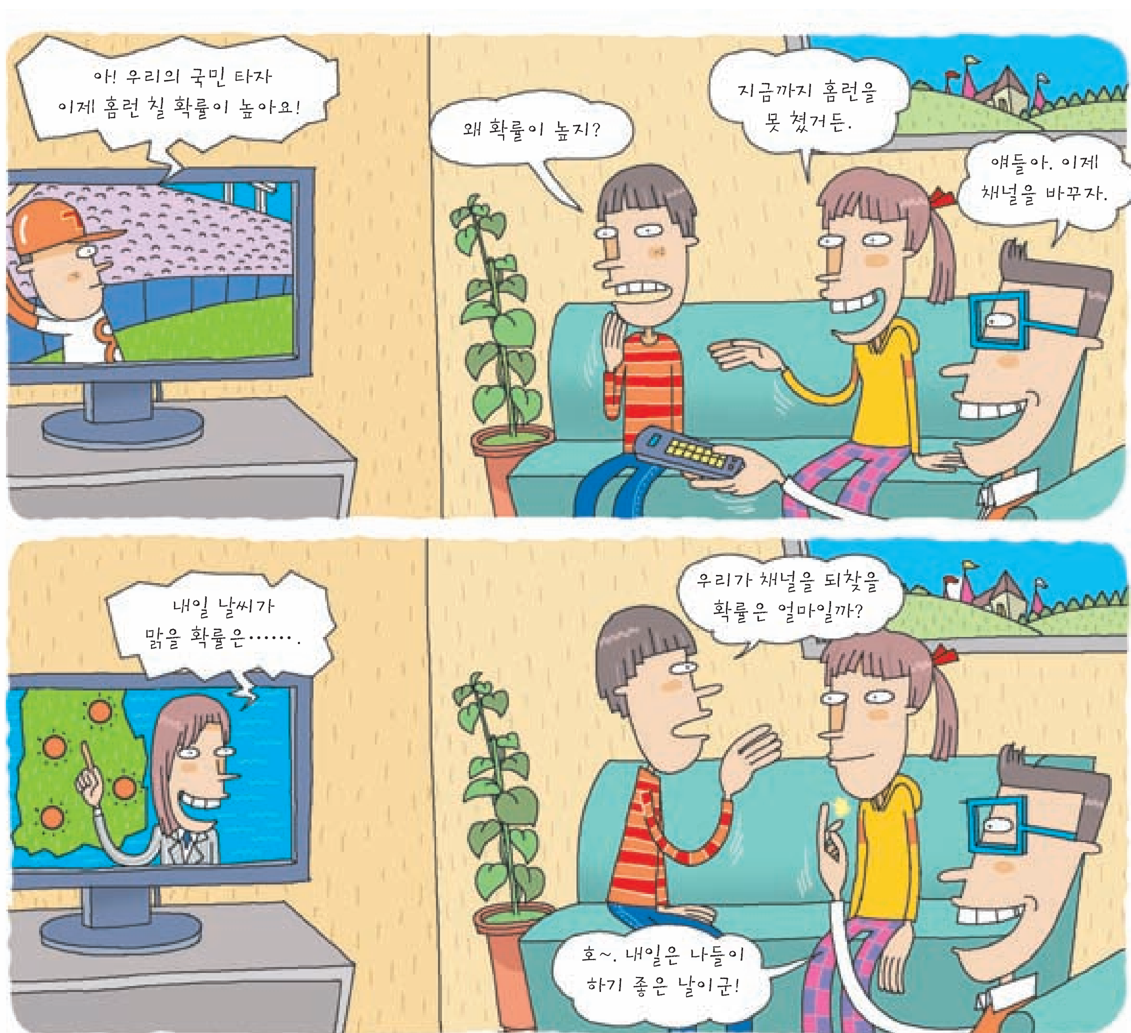
1. ${}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{2}+{}_{6}C_{2}+{}_{7}C_{2}$
2. ${}_{3}C_{3}+{}_{4}C_{3}+{}_{5}C_{3}+{}_{6}C_{3}+{}_{7}C_{3}+{}_{8}C_{3}$

2 확률의 뜻과 활용

학습 목표

- 수학적 확률과 통계적 확률을 이해한다.
- 확률의 기본 성질을 이해한다.
- 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

1. 확률의 뜻과 기본 성질
2. 확률의 계산과 활용



야구 중계를 보거나 일기 예보를 들을 때, 확률이라는 단어가 자주 등장한다. 또한 로또에 당첨될 확률, 시험에 합격할 확률 등과 같이 확률이라는 단어는 이제 일상생활의 용어가 되었으며, 우리의 의사 결정에 있어서 빠질 수 없는 중요한 요소가 되었다.

확률의 뜻과 활용에 들어가기 전에

1. 유한집합의 원소의 개수

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

① $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

특히 $A\cap B=\varnothing$일 때, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$이다.

② $n(A^C)=n(U)-n(A)$

1 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$n(A)=5$, $n(B)=4$,
$n(A\cap B)=3$

이 성립할 때, 다음을 구하여라.

(1) $n(A\cup B)$ (2) $n(A^C)$

2. 합의 법칙

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고, A, B가 동시에 일어나지 않을 때, A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

2 1에서 100까지의 자연수가 각각 적혀 있는 100장의 카드에서 임의로 한 장을 뽑을 때, 11 또는 13의 배수가 나오는 경우의 수를 구하여라.

3. 곱의 법칙

사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, A, B가 함께 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

3 주사위 1개와 동전 1개를 동시에 던져서 위에 나오는 면을 조사할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수를 구하여라.

4. 순열

① 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 순서대로 배열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

② ${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

$$=\frac{n!}{(n-r)!} \text{ (단, } 0\le r\le n)$$

③ ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$

4 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 세 개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하여라.

5. 조합

① 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

② ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

③ ${}_n\mathrm{C}_0=1$, ${}_n\mathrm{C}_n=1$, ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

5 원 위에 n개의 점이 있다. 이 점 중 6개를 택하여 만들 수 있는 육각형의 개수와 8개를 택하여 만들 수 있는 팔각형의 개수가 서로 같을 때, n의 값을 구하여라.

1. 확률의 뜻과 기본 성질

* [ ] 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

시행의 뜻

같은 조건에서 몇 번이고 반복할 수 있으며 그 결과가 우연에 의해서 정해지는 실험이나 관찰을 시행이라고 한다.

예를 들어 동전 던지기, 주사위 던지기, 제비뽑기 등은 같은 조건에서 몇 번이고 [(1)   ]할 수 있으며 그 결과는 우연에 의해서 정해지므로 [(2)   ]이다.

수학적 확률과 통계적 확률

① 어떤 시행의 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\boxed{(3)\quad}}{n}$$

와 같이 정의하고, 이것을 수학적 확률이라고 한다.

② 어떤 시행을 n번 반복할 때, 사건 A가 r_n번 일어난다고 하자. 이때, n을 한없이 크게 함에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

| 참고 | 실제로는 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 시행 횟수 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 보통 그 사건의 통계적 [(4)   ]로 본다.

③ 어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수를 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다.

확률의 기본 성질

① 임의의 사건 A에 대하여 [(5)   ]$\le \mathrm{P}(A) \le 1$

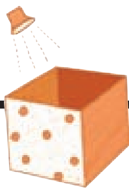
② 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=$[(6)   ]

③ 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=$[(7)   ]



···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 132~139쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 반복 (2) 시행 (3) r (4) 확률 (5) 0 (6) 1 (7) 0



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 1부터 100까지의 자연수가 각각 적힌 100장의 카드 중에서 한 장을 뽑을 때, 3의 배수가 적힌 카드가 나올 확률을 구하여라.

〔풀이〕

카드 한 장을 뽑는 모든 경우의 수는 100가지이다. 또 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수가 나오는 경우는

3, 6, 9, ⋯, 96, 99

의 33가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{33}{100}$이다.

2. 어느 농구 선수가 200번의 자유투를 던져서 170번 성공하였다. 이 선수가 자유투를 한 번 던질 때, 성공할 확률을 구하여라.

〔풀이〕

200번의 시행 중 성공한 횟수가 170번이므로 이에 대한 상대도수는

$$\frac{170}{200}=\frac{17}{20}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{17}{20}$이다.

| 스스로 하기 |

1. 1부터 50까지의 자연수가 각각 적힌 50장의 카드 중에서 한 장을 뽑을 때, 7의 배수가 적힌 카드가 나올 확률을 구하여라.

〔풀이〕

카드 한 장을 뽑는 모든 경우의 수는 50가지이다. 또 50 이하의 자연수 중에서 7의 배수가 나오는 경우는

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49

의 □가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{\square}{50}$이다.

2. 어느 양궁 선수가 500발의 화살을 쏘아서 과녁의 10점 칸을 285발 맞혔다. 이 선수가 화살을 한 발 쏠 때, 10점 칸을 맞힐 확률을 구하여라.

〔풀이〕

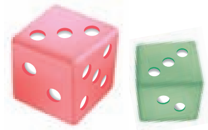
500번의 시행 중 10점 칸을 맞힌 횟수가 285번이므로 이에 대한 상대도수는

$$\frac{\square}{500}=\square$$

따라서 구하는 확률은 □이다.

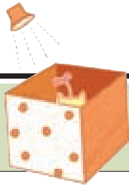
교과서 134쪽

1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수일 확률을 구하여라.



교과서 134쪽

2 빨간색 장미꽃 4송이, 노란색 장미꽃 3송이 중에서 임의로 2송이를 뽑을 때, 빨간색 장미꽃 1송이, 노란색 장미꽃 1송이가 나올 확률을 구하여라.



기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 주머니 속에 흰 공 6개와 노란 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 흰 공이 나올 확률　　(2) 노란 공이 나올 확률

(3) 검은 공이 나올 확률　　(4) 흰 공 또는 노란 공이 나올 확률

2 쌀강정이 7개, 보리 강정이 3개 들어 있는 강정 세트가 있다. 이 세트 하나에서 강정 4개를 꺼낼 때, 쌀강정이 2개, 보리 강정이 2개 나올 확률을 구하여라.

3 소설책, 수필집, 시집, 음악책, 미술책 한 권씩을 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 다음을 구하여라.

(1) 소설책이 왼쪽 끝에 올 확률

(2) 소설책, 수필집, 시집이 이웃할 확률

(3) 음악책과 미술책이 양쪽 끝에 올 확률

(2) 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각한다.

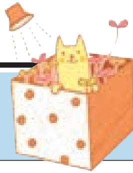
4 상자 안에 n개의 공CD를 포함하여 총 10개의 CD가 들어 있다. 이 상자에서 CD 4개를 꺼낼 때, 4개가 모두 공CD일 확률이 $\frac{1}{14}$이라고 한다. n의 값을 구하여라.



5 어느 야구 선수의 지난 시즌까지의 통산 타율이 0.305였다. 이 선수가 이번 시즌에 200번 타석에 설 때, 칠 수 있는 안타의 개수를 추측하여라.

타율은 $\frac{(\text{안타 수})}{(\text{타석수})}$를 말해!





실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수는 2^n이다.

1 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 부분집합 중 한 개를 택할 때, 원소 2가 속해 있을 확률을 구하여라.

2 주사위 한 개를 두 번 던져서 처음에 나오는 눈의 수를 a, 나중에 나오는 눈의 수를 b라고 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가질 확률을 구하여라.

3 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 네 개의 숫자를 택하여 네 자리 정수를 만들 때, 이 정수가 3400보다 클 확률을 구하여라.

나온 번호의 최댓값이 8이려면 1에서 7까지 적힌 공 중에서 3개, 8이 적힌 공 1개를 꺼내야 한단다.



4 주머니 속에 1부터 10까지의 번호가 각각 적힌 10개의 공이 들어 있다. 이 중에서 4개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 번호의 최댓값이 8이 될 확률을 구하여라.



3개 모두 흰 공이 나올 통계적 확률을 생각한다.

5 주머니에 흰 공과 검은 공을 합하여 모두 10개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내 보고 다시 넣는 시행을 여러 번 반복하였더니 6번에 1번 꼴로 3개가 모두 흰 공이었다. 이 주머니 속에 들어 있는 흰 공의 개수를 추측하여라.



개념 넓히기

통계적 확률에서 고려해야 할 사항

주사위를 n번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수가 r_n이면 그 상대도수는 다음과 같다.

$$\frac{(1\text{의 눈이 나오는 횟수})}{(\text{전체 시행 횟수})}=\frac{r_n}{n}$$

여기서 n을 충분히 크게 하면 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 어떤 값$\left(\text{이를테면 } \frac{1}{6}\right)$에 가까이 가게 될 것이고, $\frac{r_n}{n}$이 가까이 가는 값을 통계적 확률이라고 한다.

이러한 통계적 확률의 뜻에서 고려해야 할 사항 세 가지를 알아보자.

첫째, 시행 횟수 n을 충분히 크게 한다는 것은 무슨 뜻인가? 어느 정도의 n이면 충분히 크다고 볼 수 있는가? n이 100이면 충분히 큰 것인가? 아니면 n이 백만 정도는 되어야 충분히 큰 것인가? 이러한 의문에 대한 답(누구나 그렇다고 인정하는 답)은 없다. 가장 그럴듯한 답은 '충분히 크다고 느낄 만큼 큰 것' 이다. 그러나 이러한 답에 선뜻 수긍하기는 어렵다. 그러므로 통계적 확률을 구할 때, 시행 횟수 n을 정하는 일을 신중히 생각하여야 한다.

둘째, 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 어떤 값에 가까이 간다는 뜻은 무엇인가? $\frac{r_n}{n}$이 어떤 값에 가까이 간다고 할 수 있는가? 어떤 수열 $\{a_n\}$에서 a_n이 α에 가까이 가느냐, 가지 않느냐를 수학적으로 판정하는 것은 그리 어렵지 않은 일이다. 그러나 상대도수 $\frac{r_n}{n}$으로 이루어지는 수열에서는 일반항을 찾을 수 없기 때문에 이 수열의 수렴 여부를 판정하는 것은 쉬운 일이 아니다.

셋째, 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 가까이 가는 구체적인 값은 무엇인가? 즉, $\frac{r_n}{n}$의 극한값은 무엇인가? 주사위를 던질 때, 1의 눈이 나오는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$의 극한값은 $\frac{1}{6}$이라고 많은 사람들은 의심 없이 믿고 있다. 그러나 윷을 던질 때, 윷짝의 볼록한 면이 나오는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$에 대한 극한값은 아무도 언급을 하지 않고 있다. 그 이유는 주사위 던지기에서는 수학적 확률을 생각하기가 쉽고, 윷 던지기에서는 어렵기 때문이다. 다시 말하면 통계적 확률의 구체적인 값을 구하기는 매우 어려운 것이다.

프 로 젝 트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

카오스 게임

주사위를 던질 때, 윗면에 나오는 눈의 수를 항상 정확히 알아 맞히는 사람은 아무도 없다. 윗면에 나오는 눈의 수는 어떤 규칙에 의하여 나타나는 것이 아니고 단지 우연에 의한 것이기 때문이다. 즉, 주사위 던지기에서 각 시행의 결과에 대하여 우리는 '혼돈(混沌, chaos)'의 상태에 있는 것이다.

그러나 이 시행을 여러 번 반복하면 규칙성을 찾을 수 있다.

다음과 같은 게임을 하여 보자.

1단계 정삼각형 ABC를 그리고, 삼각형의 변 위에 임의의 한 점을 찍는다.

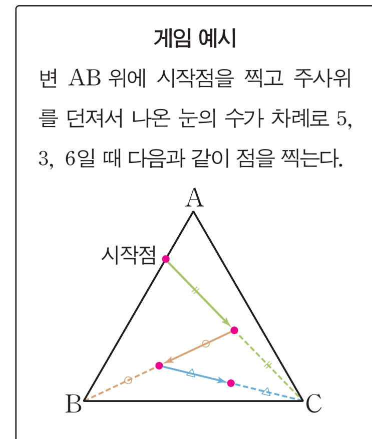
2단계 주사위를 던져서 나오는 눈의 수에 따라 다음과 같이 새로운 점을 찍는다.

❶ 눈의 수가 1 또는 2일 때: 주어진 점과 점 A의 중점
❷ 눈의 수가 3 또는 4일 때: 주어진 점과 점 B의 중점
❸ 눈의 수가 5 또는 6일 때: 주어진 점과 점 C의 중점

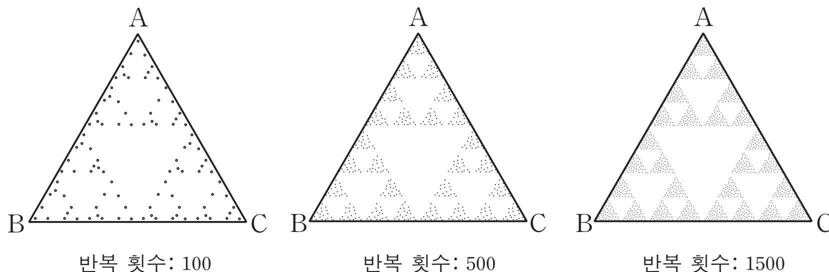
3단계 새로운 점에 대하여 위의 2단계를 반복한다.

게임 예시

변 AB 위에 시작점을 찍고 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 차례로 5, 3, 6일 때 다음과 같이 점을 찍는다.



다음 그림은 위의 시행에서 반복하는 횟수를 각각 100, 500, 1500으로 하였을 때의 예시 그림이다.



논술/수행평가 과제

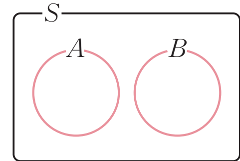
1. 교실 뒤에 커다란 종이를 붙여 놓고 학급 전체의 공동 작업으로 위의 게임을 하여 보자.
2. 공학 도구를 이용하여 위의 게임을 하여 보자.

2. 확률의 계산과 활용

* □ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

배반사건의 뜻

두 사건 A, B에 대하여 A와 B 중 어느 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어나지 않을 때, 즉 $A\cap B=\varnothing$일 때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이라고 한다.



| 보기 | 두 사건 A, B에 대하여 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 4\}$이면 A와 B는 서로 (1) □ 사건이다.

확률의 덧셈정리

① 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

② 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면, 즉 $A\cap B=\varnothing$이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

| 보기 | 동전의 앞면을 H, 동전의 뒷면을 T로 나타낼 때, 동전을 세 번 던져서 앞면이 한 번 나오는 사건을 A, 두 번 나오는 사건을 B라고 하면

$$A=\{\mathrm{HTT},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{TTH}\},\ B=\{\mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH}\}$$

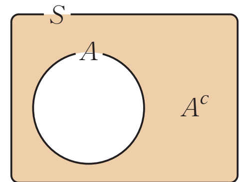
이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}$이다. 이때, $A\cap B=\varnothing$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\boxed{(2)}=\frac{\boxed{(3)}}{4}$$

여사건의 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다. 이때, 여사건 A^C의 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$



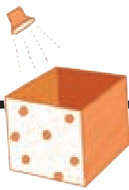
| 보기 | 동전을 세 번 던질 때, 앞면이 적어도 한 번 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 앞면이 한 번도 나오지 않는 사건이다. 이때, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\frac{\boxed{(4)}}{8}=\boxed{(5)}$$



⋯▸ 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 140~143쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 배반 (2) $\mathrm{P}(B)$ (3) 3 (4) 1 (5) $\frac{7}{8}$



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 서로 배반사건인 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=0.3,\ \mathrm{P}(A\cup B)=0.7$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값을 구하여라.

〔풀이〕

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$0.7=0.3+\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=0.4$

2. 5개의 제비 중에 당첨 제비가 2개 들어 있다. 이 제비에서 동시에 2개를 뽑을 때, 당첨 제비가 적어도 1개가 나올 확률을 구하여라.

〔풀이〕

당첨 제비가 적어도 1개가 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 당첨 제비가 1개도 나오지 않을 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

| 스스로 하기 |

1. 서로 배반사건인 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B)=0.2,\ \mathrm{P}(A\cup B)=0.9$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값을 구하여라.

〔풀이〕

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$0.9=\mathrm{P}(A)+\square$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\square$

2. 필통에 빨간색 연필 7자루와 파란색 연필 3자루가 들어 있다. 필통에서 임의로 3자루의 연필을 꺼낼 때, 파란색 연필이 적어도 1자루가 나올 확률을 구하여라.

〔풀이〕

파란색 연필이 적어도 1자루가 나오는 사건을 A라고 하면 A^C은 3자루가 모두 빨간색 연필일 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\square$$

따라서 구하는 확률은

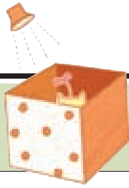
$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\square=\square$$

교과서 142쪽

1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수 또는 4의 배수가 될 확률을 구하여라.

교과서 142쪽

2 남학생 6명, 여학생 4명 중에서 청소 당번 3명을 뽑을 때, 3명 모두 남학생이거나 3명 모두 여학생일 확률을 구하여라.



기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=0.4,\ \mathrm{P}(B^C)=0.3,\ \mathrm{P}(A\cup B)=0.95$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구하여라.

2 30장의 복권에 1등 당첨 복권이 1장, 2등 당첨 복권이 5장, 3등 당첨 복권이 10장 들어 있다. 이 복권 중에서 2장을 고를 때, 다음을 구하여라.

(1) 당첨 복권이 1장도 나오지 않을 확률

(2) 적어도 1장은 당첨 복권이 나올 확률

12와 서로소인 수는 5, 7, 11이다.

3 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수의 합과 12가 서로소일 확률을 구하여라.

4 1학년 학생 4명, 2학년 학생 5명, 3학년 학생 6명 중에서 3명의 대표를 선발할 때, 선발될 대표가 모두 같은 학년일 확률을 구하여라.



5 10개의 제비 중에서 3개의 제비를 뽑을 때, 적어도 1개의 당첨 제비를 뽑을 확률은 $\frac{29}{30}$이다. 당첨 제비의 개수를 구하여라.

(단, 각 제비가 뽑힐 확률은 같다.)



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

! 오류 피하기
한 직선 위의 세 점을 택하면 삼각형을 만들 수 없다.

1 오른쪽 그림과 같이 평행한 두 직선 l, m 위에 각각 3개, 4개의 점이 있다. 이 중에서 임의로 3개의 점을 택하여 모두 선분으로 이을 때, 그것이 삼각형이 될 확률을 구하여라.





2 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택할 때, 한 집합이 다른 집합의 진부분집합이 될 확률을 구하여라.

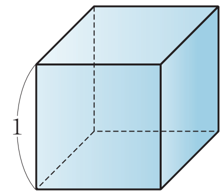
3 한 개의 주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나오는 눈의 수를 a, 두 번째 나오는 눈의 수를 b라고 할 때, 직선 $y=\frac{b}{a}x$의 기울기가 2 이하일 확률을 구하여라.

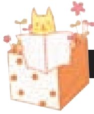
$a>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건은 $b^2-4ac<0$이다.

4 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라고 할 때, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립할 확률을 구하여라.

두 꼭짓점 사이의 거리는 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 중 하나이다.

5 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체의 꼭짓점 중에서 임의로 두 점을 택할 때, 두 점을 이은 선분의 길이가 $\frac{3}{2}$보다 작을 확률을 구하여라.





읽기 자료

심프슨의 역설



어느 대학의 A 학과와 B 학과에 지망한 수험생의 자료가 다음 표와 같다고 하자.

구분	여학생			남학생		
	지원자 수	합격자 수	합격률	지원자 수	합격자 수	합격률
A 학과	50	20	40 %	30	10	약 33 %
B 학과	40	30	75 %	70	50	약 71 %
A, B 학과	90	50	약 56 %	100	60	60 %

이 표에서 보면 A 학과의 경우 여학생의 합격률은 40 %이고, 남학생의 합격률은 약 33 %이다. 또 B 학과의 경우 여학생의 합격률은 75 %이고 남학생의 합격률은 약 71 %이다. 두 학과 모두 여학생의 합격률이 높다. 그러나 두 학과 A, B 를 합쳐서 보면 여학생의 합격률은 약 56 %이고, 남학생의 합격률은 60 %로 남학생의 합격률이 높다.

이것은 우리의 직관과는 상충되는 것으로써 합격률이 높은 B 학과의 남학생 수가 많아서 일어나는 현상이다.

이러한 현상은 확률분야에서 '심프슨의 역설'로 널리 알려져 있다.

실생활 문제 해결하기

*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해 보는 문제입니다.

두 사람이 만날 확률

| 문제 | A, B 두 사람이 11시와 12시 사이에 어떤 장소에서 만나기로 하였다. 누가 먼저 도착하던지 10분 동안만 기다리기로 하였을 때, A와 B가 이 장소에서 만날 확률을 구하여라.

1단계_ 문제를 이해하여 보자.

(1) A와 B가 약속 장소에 도착하는 시각을 각각 11시 x분, 11시 y분이라고 할 때, x가 가질 수 있는 값의 범위와 y가 가질 수 있는 값의 범위를 구하여라.

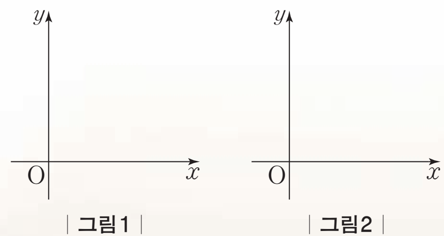
(2) A가 11시 30분에 도착한다고 할 때, 두 사람이 만나려면 B는 언제 도착하면 되는가?

(3) 두 사람이 만나기 위한 x, y 사이의 관계식을 구하여라.

2단계_ 계획을 세워 보자.

(1) x, y가 가질 수 있는 값의 범위를 | 그림 1 | 에 나타내어라.

(2) | 그림 1 | 의 영역 안에서 1단계의 (3)에서 구한 x, y 사이의 관계식을 만족하는 영역을 | 그림 2 | 에 나타내어라.



| 그림 1 |　　| 그림 2 |

3단계_ 문제를 풀어 보자.

(1) 2단계의 (1)에서 나타낸 영역의 넓이를 구하여라.

(2) 2단계의 (2)에서 나타낸 영역의 넓이를 구하여라.

(3) 두 사람이 만날 확률을 구하여라.



3 조건부확률

학습 목표

- 조건부확률을 구할 수 있다.
- 사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.
- 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

1. 조건부확률과 확률의 곱셈정리



우산을 밖에서 잃어버렸다면 어느 곳에서 잃어버렸을 확률이 가장 클까? 만약 우산을 찾으러 간다면 어느 곳부터 먼저 가야 할까?

이 단원을 배우면 이러한 문제를 해결할 수 있다.

조건부확률에 들어가기 전에

1. 표본공간과 사건

어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다.

1 주사위를 두 번 던져서 윗면에 나오는 눈의 수를 관찰할 때, 다음을 구하여라.

(1) 표본공간 S

(2) S의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 집합의 개수

2. 확률의 기본 성질

① 임의의 사건 A에 대하여　　$0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

② 반드시 일어나는 사건 S에 대하여　　$\mathrm{P}(S)=1$

③ 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여　　$\mathrm{P}(\varnothing)=0$

2 남자 2명, 여자 3명 중에서 3명을 뽑을 때, 다음을 구하여라.

(1) 3명 모두 남자일 확률

(2) 여자가 반드시 포함될 확률

(3) 남자가 1명만 포함될 확률

3. 확률의 덧셈정리

① 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$$

② 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

3 정이십면체 주사위의 각 면에 1부터 20까지의 자연수가 적혀 있다. 이 주사위를 한 번 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 2의 배수가 나올 확률

(2) 3의 배수가 나올 확률

(3) 2의 배수 또는 3의 배수가 나올 확률

4. 여사건의 확률

임의의 사건 A에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$

4 5개의 과일 귤, 사과, 배, 바나나, 포도 중에서 3개를 택할 때, 다음을 구하여라.

(1) 귤이 포함될 확률

(2) 귤이 포함되지 않을 확률

1. 조건부확률과 확률의 곱셈정리

* □ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

조건부확률의 뜻

어떤 시행에서 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(B|A)$와 같이 나타낸다. 이때

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(\boxed{(1)\quad})}{\mathrm{P}(A)} \text{ (단, } \mathrm{P}(A)\neq 0\text{)}$$

확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\boxed{(2)\quad}\mathrm{P}(A|B)$$

사건의 독립과 종속

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$$

가 성립할 때, 두 사건 A, B는 서로 독립이라고 한다.

또 두 사건 A, B가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건은 서로 $\boxed{(3)\quad}$이라고 한다.

독립인 사건에 대한 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0\text{)}$$

독립시행의 뜻과 그 확률

① 각각의 시행이 같은 조건으로 반복되고 다른 시행의 결과에 영향을 받지 않을 때, 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

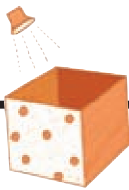
② 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률 P_r는

$$\mathrm{P}_r=\boxed{(4)\quad}p^r q^{n-r} \text{ (단, } q=1-p,\ r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{)}$$



⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 146~152쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $A\cap B$ (2) $\mathrm{P}(B)$ (3) 종속 (4) ${}_n\mathrm{C}_r$



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 한 개의 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나올 때, 그것이 소수일 확률을 구하여라.

〔풀이〕
짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$$A=\{2,\ 4,\ 6\},\ B=\{2,\ 3,\ 5\},$$
$$A\cap B=\{2\}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{3}$$

2. 어떤 문제를 풀 확률이 갑은 $\frac{3}{4}$, 을은 $\frac{4}{5}$라고 한다. 두 사람 중 적어도 한 사람이 문제를 풀 확률을 구하여라.

〔풀이〕
아무도 문제를 못 풀 확률은

$$\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{20}$$

따라서 적어도 한 사람이 문제를 풀 확률은

$$1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$$

| 스스로 하기 |

1. 한 개의 주사위를 던져서 6의 약수의 눈이 나올 때, 그것이 짝수일 확률을 구하여라.

〔풀이〕
6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 짝수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\},\ B=\{2,\ 4,\ 6\},$$
$$A\cap B=\{2,\ 6\}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\square}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{\square}{2},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{\square}{3}$$

구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\square$$

2. 어느 두 사격 선수의 명중률은 각각 0.8, 0.6이라고 한다. 두 선수가 각각 한 발씩 같은 표적에 사격을 할 때, 적어도 한 발이 명중될 확률을 구하여라.

〔풀이〕
아무도 명중하지 못할 확률은

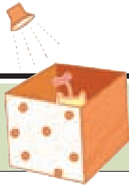
$$(1-0.8)\times(1-0.6)=\square$$

따라서 적어도 한 발이 명중될 확률은

$$1-\square=\square$$

교과서 151쪽

1 표본공간 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이고, 각 근원사건이 일어날 확률은 모두 같다고 하자. 두 사건 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{3,\ 6\}$이 서로 독립인지 종속인지를 말하여라.



기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

$\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$
$=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$

1 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{4}$일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값을 구하여라.

2 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=0.7,\ \mathrm{P}(B)=0.4,\ \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=0.2$$

일 때, $\mathrm{P}(A|B)$의 값을 구하여라.



3 10개의 초콜릿 중에서 6개에는 땅콩이 들어 있고, 4개에는 아몬드가 들어 있다. 이 중에서 두 개를 차례로 먹을 때, 첫 번째에는 땅콩이 들어 있는 초콜릿을, 두 번째에는 아몬드가 들어 있는 초콜릿을 먹을 확률을 구하여라.

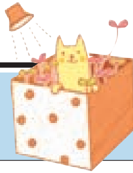
4 어느 학생이 1차 시험에 합격할 확률은 $\frac{1}{20}$이고, 1차 시험과 2차 시험에 모두 합격할 확률은 $\frac{1}{50}$이다. 이 학생이 1차 시험에 합격했을 때, 2차 시험에도 합격할 확률을 구하여라.

A, B가 서로 독립이면
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
A, B가 서로 종속이면
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

5 한 개의 주사위를 던질 때, 나오는 눈의 수가 홀수인 사건을 A, 3 이하인 사건을 B, 4 또는 5인 사건을 C라고 하자. 다음 두 사건이 서로 독립인지 종속인지를 각각 말하여라.

(1) 사건 A와 사건 B　　　　(2) 사건 A와 사건 C

6 어떤 의약품의 치유율이 $\frac{3}{5}$이라고 한다. 이 의약품으로 4명의 환자를 치료할 때, 적어도 한 명이 치유될 확률을 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$이고 $\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{8}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구하여라.

2 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{6}{7}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{7}$일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값을 구하여라.

참인 증거를 보여 준다면? 또 거짓인 증거를 보여 준다면? 어떻게 될까?



3 참인 증거 3가지, 거짓인 증거 2가지가 있다. 거짓말을 할 확률이 $\frac{3}{10}$인 어떤 증인에게 증거 한 가지를 보여 주었을 때, 참인 증거라고 대답할 확률을 구하여라.

문제를 읽지 않고 답을 선택해서 1문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

4 옳은 것에는 ○표, 옳지 않은 것에는 ×표를 하는 문제가 10개 출제된 시험에서 8개 이상을 맞혀야 합격할 수 있다고 한다. 어느 수험생이 문제를 전혀 읽지 않고 답을 선택할 때, 이 시험에서 합격할 확률을 구하여라.



5 어떤 배구 대회에서 결승에 진출한 두 팀 A, B가 5번의 경기를 하여 3번을 먼저 이기면 우승한다고 한다. 두 팀 A, B의 경기에서 A 팀의 승률은 $\frac{3}{5}$이고, 우승팀이 4번째 시합에서 결정될 확률이 $\frac{n}{m}$일 때, $m+n$의 값을 구하여라.

(단, m, n은 서로소이고, 두 팀이 비기는 경우는 없다.)

IV 대 단 원　확 인 하 기

1 ★

의사소통

똑같은 공책 8권을 세 명에게 모두 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

(단, 모든 사람은 적어도 한 권의 공책을 받는다.)

2 ★★

계산

다항식 $(x+1)^5(3x-2)^4$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하여라.

3 ★★

계산

n이 자연수일 때, 다음을 만족하는 n의 값을 구하여라.

$$500<{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+{}_{n}C_3+\cdots+{}_{n}C_n<1000$$

4 ★★★

추론

다음 등식이 성립함을 증명하여라.

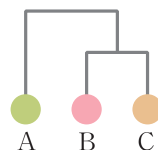
(1) ${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$

(2) ${}_{n}C_0^{\,2}+{}_{n}C_1^{\,2}+\cdots+{}_{n}C_n^{\,2}=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$

5 ★★

문제 해결

어떤 시합에서 A가 B를 이길 확률은 $\frac{1}{2}$, B가 C를 이길 확률은 $\frac{3}{4}$, C가 A를 이길 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 오른쪽 그림의 대진표와 같이 A, B, C 세 사람이 토너먼트 방식으로 시합을 할 때, A가 우승할 확률을 구하여라. (단, 비기는 경우는 없다고 한다.)



문제 해결

6 ★

두 명의 축구 선수가 한 번의 페널티 킥에서 공을 넣을 확률이 각각 0.9, 0.8이다. 이 두 선수에게 각각 한 번씩 페널티 킥이 주어질 때, 적어도 한 선수가 공을 넣을 확률을 구하여라.



문제 해결

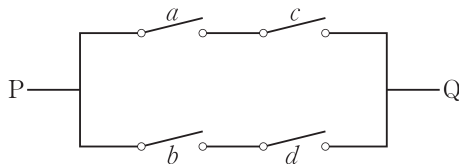
7 ★★★

종철이가 학급 학생 40명을 대상으로 집에서 구독하는 신문의 종류를 조사하였더니 A, B 신문을 구독하는 학생이 각각 24명, 16명이었고, A, B 신문 중에서 어느 것도 구독하지 않는 학생이 8명이었다. A 신문을 구독하는 학생 중에서 한 명을 택하였을 때, 그 학생이 B 신문을 구독할 확률을 구하여라.

문제 해결

8 ★★★

다음 그림과 같은 회로에서 네 개의 스위치 a, b, c, d는 독립적으로 작동되며 닫혀 있을 확률은 각각 0.2, 0.3, 0.4, 0.5이다. P에서 Q로 전류가 흐를 확률을 구하여라.



이해

9 ★★

주머니에 흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개 꺼내어 색을 조사하고 다시 넣는 시행을 10회 반복할 때, 흰 공이 8회 이하로 나올 확률을 구하여라.

이해

10 ★★

5개의 보기 중에 맞는 답을 고르는 오지선다형 문제가 10개 출제된 시험에서 9개 이상을 맞혀야 합격할 수 있다고 한다. 어느 수험생이 문제를 전혀 읽지 않고 답을 선택할 때, 이 시험에서 합격할 확률을 구하여라.

프로젝트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

몬티 홀의 문제

몬티 홀의 문제는 미국의 TV 오락 프로그램인 'Let's make a deal'의 진행자 몬티 홀(Monty Hall)의 이름에서 유래되었다. 이 문제는 다음과 같다.

안이 보이지 않는 세 곳 중 한 곳에는 고급 자동차를, 나머지 두 곳에는 삐쩍 마른 염소를 넣어 두고, 프로그램 참여자에게 한 곳을 고르게 한다. 그리고 진행자인 몬티 홀이 나머지 두 곳 중 염소가 있는 곳을 보여 준 후, 참여자에게 선택을 바꿀지 여부를 묻는다. 여기서 참여자가 선택한 곳에 있는 것을 상품으로 받는다.



이 문제는 처음에 사람들을 매우 곤란하게 만들었다. 선택을 바꾸어 행운을 잡으면 좋지만, 거꾸로 선택을 바꾸어서 행운을 놓칠 수도 있기 때문이다.

그러나 결론은 '바꾸는 것이 좋다'이다. 선택을 바꾸면 행운을 잡을 확률이 $\frac{2}{3}$이고, 바꾸지 않으면 그 확률이 $\frac{1}{3}$이기 때문이다.

장막에 가려진 세 곳을 각각 1번, 2번, 3번이라고 할 때, 그곳에 자동차 또는 염소가 들어 있는 경우는 오른쪽 표와 같이 3가지이다. 이 중에서 참여자가 처음에 어떤 곳을 선택하더라도 안 바꾸는 것이 유리한 경우는 1가지이고, 바꾸는 것이 유리한 경우는 2가지이다.

1번	2번	3번
자동차	염소	염소
염소	자동차	염소
염소	염소	자동차

논술/수행평가 과제

2명씩 짝을 정하여 몬티 홀의 문제를 모의실험하여 보고 선택을 바꾸면 행운을 잡을 확률이 $\frac{2}{3}$, 바꾸지 않으면 그 확률이 $\frac{1}{3}$임을 확인하여 보자.



읽기 자료

우리나라의 전통 주사위 목제주령구

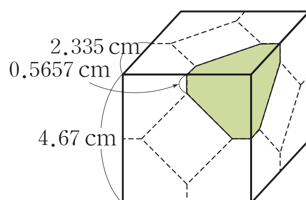


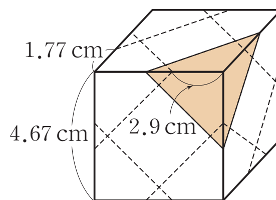
경주 안압지에서 출토된 '목제주령구'라는 주사위는 보통 우리가 보아 온 6면체가 아니라 특이하게 14면체로 되어 있다. 이 주사위는 정사각형 모양의 면 6개와 육각형 모양의 면 8개로 이루어져 있다.

주사위의 각 면에는 금성작무(禁聲作儛, 소리내지 않고 춤추기), 농면공과(弄面孔過, 얼굴을 간질어도 꼼짝하지 않기), 임의청가(任意請歌, 누구에게나 마음대로 노래시키기), 월경일곡(月鏡一曲, 월경 한 곡조 부르기), 공영시과(空詠詩過, 시 한 수 읊기) 등과 같이 놀이와 관련된 모두 14개의 한자 어구가 음각되어 있다.

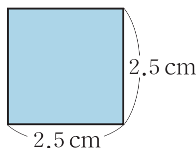
목제주령구는 정육면체 주사위에 비해 훨씬 많은 경우를 나타낼 수 있어 우리 선조들의 지혜를 엿볼 수 있다.

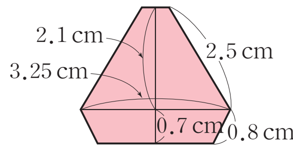
| 참고 | 목제주령구는 다음 그림과 같이 두 가지 방법으로 정육면체의 꼭짓점 부근을 잘라서 만들 수 있다.





목제주령구에서 정사각형 모양의 면의 넓이는 6.25 cm^2이고 육각형 모양의 면의 넓이는 6.265 cm^2이다.





실제로 이 주사위를 만들어 던지는 실험을 한 결과는 다음과 같다.

면	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	합계
도수	73	74	66	39	59	56	31	48	34	39	60	39	42	40	700
상대도수	0.104	0.106	0.094	0.056	0.084	0.080	0.044	0.068	0.049	0.056	0.086	0.056	0.060	0.057	1

V 통계

요즘은 선거의 결과를 개표 시작과 동시에 거의 정확히 예측한다.
또 가을 추수가 끝나기도 전에 올해의 벼 수확량을 추정하여 발표한다.
이것은 전체를 다 조사하지 않고도 추정할 수 있는 표본조사의 기법이
나날이 정교해지기 때문이다.





현대통계학의 바탕을 이룬 네이만

_Neyman, J. ; 1894~1981



19세기 말에 태어난 네이만은 근대통계학을 완성한 피어슨(Pearson, K. ; 1857～1936)과의 협동 작업을 통하여 통계적 가설검정의 문제에 대한 명확한 해법을 제공하였다. 네이만의 업적은 현대통계학을 완성한 피셔(Fisher, R. A. ; 1890～1962)의 이론에 밑바탕이 되었다.

네이만은 가설검정법 뿐만 아니라 구간추정법을 계통적으로 발전시키고 층별 임의추출법에 기여하는 등 현대통계학의 발전에 크게 이바지하였다.

1 확률분포

학습 목표

- 확률변수와 확률분포를 이해한다.
- 확률변수의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
- 이항분포와 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해할 수 있다.

1. 확률변수와 확률분포　　2. 평균과 표준편차　　3. 이항분포　　4. 정규분포



21세기 지식·정보화 사회의 특징은 대량의 자료 생산과 그 유통이라고 볼 수 있다. 이제는 백과사전보다는 컴퓨터에 더 많이 의존하여 자료를 검색하고 있다. 그러나 이들 자료를 검증 없이 맹신하는 것은 위험하다. 자료를 정리하고 분석하여 유용한 정보를 이끌어 냄으로써 실생활의 문제를 해결하는 것이 통계적인 사고방식이라고 할 수 있다.

확률분포에 들어가기 전에

1. 평균, 분산, 표준편차

n개의 자료 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$에 대하여

① 평균: $m=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

② 분산: $\sigma^2=\frac{1}{n}\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2\}$

③ 표준편차: $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$

1 다음은 영주가 어느 날 전화한 5번의 통화 시간이다. 통화 시간의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

83, 78, 93, 73, 88

2. 합의 기호 $\sum$의 뜻

$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$의 합을 기호 $\sum$를 사용하여

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

로 나타낸다.

2 다음을 $\sum$를 써서 나타내어라.

(1) $p_1+p_2+\cdots+p_n$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0\,q^n+{}_n\mathrm{C}_1\,pq^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2\,p^2q^{n-2}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\,p^n$

3. $\sum$의 성질

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

④ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

3 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2=A,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=m$이라고 할 때, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2$을 $A,\ m$으로 나타내어라.

4. 확률의 뜻과 기본 성질

① 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, r개의 근원사건으로 이루어진 사건 A가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{n}$$

② $0\le \mathrm{P}(A)\le 1,\ \mathrm{P}(S)=1,\ \mathrm{P}(\varnothing)=0$

4 한 개의 동전을 세 번 던질 때, 다음 확률을 구하여라.

(1) 앞면이 2번 나올 확률

(2) 앞면이 3번 나올 확률

1. 확률변수와 확률분포

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

확률변수

표본공간의 각 원소에 하나의 실수의 값을 대응시켜 주는 것을 확률변수라고 한다.

이산확률변수와 확률질량함수

① 확률변수 X가 유한개의 값 또는 자연수와 같이 셀 수 있는 값을 가질 때, X를 이산확률변수라 하고, X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 $\mathrm{P}(X=$ (1) $)$와 같이 나타낸다. 이때, $\mathrm{P}(X=$ (2) $)$를 확률질량함수라고 한다.

② 이산확률변수 X가 가지는 값과 그 값을 가질 확률과의 대응 관계를 X의 확률분포라고 한다.

확률질량함수의 성질

① $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\geq 0$ (단, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

② $\sum_{i=1}^{n} p_i=$ (3)

③ $\mathrm{P}(x_i\leq X\leq x_j)=\sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, $i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$이고, $i\leq j$이다.)

연속확률변수와 확률밀도함수

농작물의 무게, 사람의 키, 전구의 수명 시간 등과 같이 어떤 (4) 의 모든 실수의 값을 가지는 확률변수를 연속확률변수라고 한다.

| 참고 | 연속확률변수 X에 대하여 어떤 적당한 함수 $f(x)$가 존재하여 $\mathrm{P}(X\leq x)$가 $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$로 표시될 때, $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

확률밀도함수의 성질

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)\ (\alpha\leq x\leq \beta)$이면

① $f(x)\geq 0$

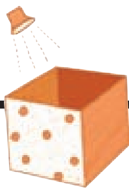
② $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=1$

③ $\mathrm{P}(a\leq X\leq b)=\int_{a}^{b} f(x)dx$ (단, $\alpha\leq a\leq b\leq \beta$)



···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 158~164쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) x (2) x (3) 1 (4) 구간



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 다섯 장의 카드 1, 2, 3, 4, 5 에서 임의로 동시에 두 장의 카드를 뽑아 두 수의 차를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내어라.

〔풀이〕

두 장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2=10$(가지)

확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이고, 각각의 경우는 다음과 같다.

$X=1$: {1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 5}

$X=2$: {1, 3}, {2, 4}, {3, 5}

$X=3$: {1, 4}, {2, 5}, $X=4$: {1, 5}

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

2. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=k \text{ (단, } 2\le x\le 8)$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 k의 값 (2) $P(3\le X\le 5)$

〔풀이〕

(1) $\int_2^8 k\,dx=\Big[kx\Big]_2^8=6k=1$

$\therefore k=\frac{1}{6}$

(2) $\int_3^5 \frac{1}{6}dx=\Big[\frac{1}{6}x\Big]_3^5=\frac{1}{3}$

| 스스로 하기 |

1. 네 장의 카드 1, 2, 3, 4 에서 임의로 동시에 두 장의 카드를 뽑아 두 수의 합을 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내어라.

〔풀이〕

두 장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=6$(가지)

확률변수 X가 가지는 값은 3, 4, 5, 6, 7이고, 각각의 경우는 다음과 같다.

$X=3$: {1, 2}, $X=4$: {1, 3}

$X=5$: {1, 4}, {2, 3}

$X=6$: $\square$, $X=7$: {3, 4}

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	3	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\square$	$\frac{1}{6}$	1

2. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{2}x-k \text{ (단, } 2\le x\le 4)$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 k의 값 (2) $P(2\le X\le 3)$

〔풀이〕

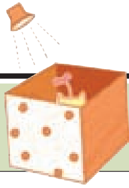
(1) $\int_2^4\left(\frac{1}{2}x-k\right)dx=\Big[\frac{1}{4}x^2-\square x\Big]_2^4=1$

$\therefore k=\square$

(2) $\int_2^3\left(\frac{1}{2}x-\square\right)dx=\square$

교과서 161쪽

1 노란 공 2개와 파란 공 4개가 들어 있는 상자에서 임의로 2개를 꺼낼 때, 노란 공이 나오는 개수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내고, 확률 $P(X\ge 1)$을 구하여라.



기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표가 다음과 같을 때, 확률 $\mathrm{P}(2\le X\le 3)$을 구하여라.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$2k$	$\frac{1}{4}$	k	$\frac{1}{4}$	1

2 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수가 짝수인 주사위의 개수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표가 다음과 같을 때, 두 실수 a, b의 값을 각각 구하여라.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{a}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{b}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

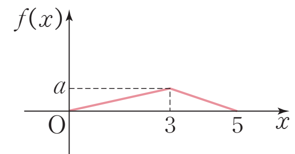
3 이산확률변수 X가 가지는 값이 1, 2, 3, $\cdots$, 9, 10이고, 그 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)=kx$일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

❗ 오류 피하기
확률밀도함수 $f(x)$가 $0\le x\le 3$에서 정의되므로 $X\ge\frac{5}{2}$인 경우는 $\frac{5}{2}\le X\le 3$임에 주의한다.

4 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=kx$ $(0\le x\le 3)$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 k의 값 (2) $\mathrm{P}(1\le X\le 2)$ (3) $\mathrm{P}\left(X\ge\frac{5}{2}\right)$

5 어떤 고등학교 학생들의 주당 TV 시청 시간을 확률변수 X라고 할 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 확률 $\mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{1}{15}$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.





실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열의 일반항은 ar^{n-1}

1 이산확률변수 X의 확률분포가 $\mathrm{P}(X=i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$일 때, 확률 p_1, p_2, p_3, p_4가 이 순서로 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열을 이룬다고 한다. 확률 $\mathrm{P}(X=4)$를 구하여라.

2 원점 O를 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 동전 한 개를 던져서 앞면이 나오면 $+1$만큼, 뒷면이 나오면 -1만큼 점 P를 이동한다. 동전을 두 번 던질 때, 점 P의 좌표를 확률변수 X라 하고, 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(2) 확률 $\mathrm{P}(X\le 0)$을 구하여라.



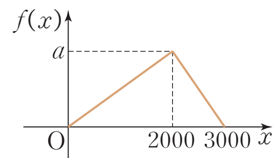
3 1부터 6까지의 숫자가 각각 적혀 있는 6장의 카드에서 동시에 3장을 뽑을 때, 뽑힌 카드에 적힌 수 중 가장 작은 수를 확률변수 X라고 하자. 확률 $\mathrm{P}(X\le 2)$를 구하여라.

4 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{1}{4}x+k\ (0\le x\le 2)$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 k의 값을 구하여라.

(2) 조건부확률 $\mathrm{P}\left(X\ge \frac{1}{2}\,\middle|\,X\le 1\right)$을 구하여라.

5 어떤 공장에서 생산되는 전구의 수명 시간을 X라고 하면 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다고 한다. 이 공장에서 생산된 전구 2개를 구입하여 사용할 때, 적어도 1개는 2000시간 이상 사용하게 될 확률을 구하여라.



2. 평균과 표준편차

* □ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 이산확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차

이산확률변수 X가 가지는 값이 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$이고 그 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

일 때, X의 평균(기댓값), 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

① 평균: $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m$

② 분산: $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\mathrm{E}(X^2)-$ [(1)]^2

③ 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

● 연속확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차

연속확률변수 X가 구간 $[\alpha,\ \beta]$의 모든 값을 가지고, 그 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

① 평균: $\mathrm{E}(X)=\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx=m$

② 분산: $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-$ [(2)] $)^2f(x)dx$

$=\int_{\alpha}^{\beta}$ [(3)] $f(x)dx-m^2=\mathrm{E}(X^2)-m^2$

③ 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

● 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 $aX+b(a\neq0,\ b$는 상수$)$의 평균, 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

① 평균: $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+$ [(4)]

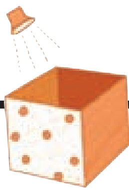
② 분산: $\mathrm{V}(aX+b)=$ [(5)] $\mathrm{V}(X)$

③ 표준편차: $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$



⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 165~173쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) m (2) m (3) x^2 (4) b (5) a^2



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구하여라.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

〔풀이〕

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{3}{10}=2$

$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{2}{5}+3^2\cdot\frac{3}{10}-2^2$

$=\frac{3}{5}$

2. $\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{V}(X)=4$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{E}(3X+1)$　　(2) $\mathrm{V}(-2X+3)$

〔풀이〕

(1) $\mathrm{E}(3X+1)=3\mathrm{E}(X)+1$

$=3\cdot2+1=7$

(2) $\mathrm{V}(-2X+3)=(-2)^2\,\mathrm{V}(X)$

$=4\times4=16$

| 스스로 하기 |

1. 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구하여라.

X	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

〔풀이〕

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{4}=\square$

$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{2}+5^2\cdot\frac{1}{4}-\square$

$=\square$

2. 확률변수 X의 평균이 3이고 분산이 4일 때, 확률변수 $-3X+2$의 평균과 분산을 구하여라.

〔풀이〕

$\mathrm{E}(-3X+2)=-3\mathrm{E}(X)+\square$

$=\square$

$\mathrm{V}(-3X+2)=(-3)^2\,\mathrm{V}(X)$

$=\square$

교과서 168, 171쪽

1 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, 물음에 답하여라.

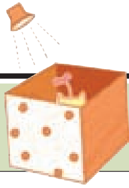
X	-3	-2	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(1) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구하여라.

(2) $Y=3X+3$이라고 할 때, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{V}(Y)$를 구하여라.

교과서 169쪽

2 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{1}{2}\,(-1\le x\le1)$일 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.



기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 표는 100명이 참가한 어느 경연 대회에서 입상자에 대한 상금 내역이다. 참가자 한 사람이 받을 수 있는 상금에 대한 기댓값을 구하여라.

순위	1등	2등	3등	4등	5등	등 외
인원(명)	1	2	5	10	15	67
상금(만 원)	10	5	3	2	1	0

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

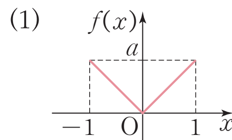
2 확률변수 X에 대하여 $E(X)=5$, $V(X)=3$일 때, $E(X^2)$을 구하여라.

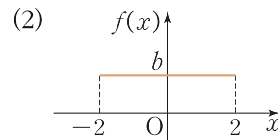
3 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, 확률변수 $Y=3X+1$의 분산을 구하여라. (단, a는 상수)

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$2a$	$\frac{1}{4}$	a	1

확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

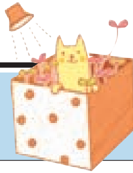
4 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1)


(2)


5 어느 지역의 인구 조사에서 가구당 가족 수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포는 다음 표와 같다. 확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	0.05	0.2	0.25	0.4	0.1	1



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 다음 물음에 답하여라.

X	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	a	$\frac{a}{2}$	a^2	1

(1) 상수 a의 값을 구하여라.

(2) $E(X)$, $V(X)$를 구하여라.

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내어 $E(X)$, $E(X^2)$을 구해 보렴~.



2 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 확률변수 X라고 할 때, 확률변수 $4X-X^2$의 평균을 구하여라.

3 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)=ax+b$ $(0\leq x\leq 3)$에 대하여 $f(3)=0$이 성립한다. 확률변수 X의 평균과 분산을 구하여라.



4 지애가 활을 한 발 쏠 때, 10점짜리 영역을 맞힐 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 어느 날 지애가 활쏘기 연습에서 처음으로 10점짜리 영역을 맞힐 때까지 쏜 화살의 개수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 평균을 구하여라.

5 평균이 m, 표준편차가 σ인 어떤 시험의 원점수 X를 다음과 같이 Y점수로 변환하였다.

$$Y=15\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50$$

으로 변환하였다. 효주의 원점수 65점은 80점으로 변환되었고, 승오의 원점수 60점은 65점으로 변환되었을 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) m과 σ를 각각 구하여라.

(2) 변환된 점수 Y의 평균과 표준편차를 각각 구하여라.

3. 이항분포

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

이항분포의 뜻

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 X는 0, 1, 2, …, n의 값을 가지는 이산확률변수이고, X의 확률분포는 다음과 같다.

$$P(X=x)={}_{n}C_{x}p^{x}(1-p)^{n-x} \ (\text{단, } x=0, 1, 2, \cdots, n)$$

이와 같은 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $B(n, p)$와 같이 나타낸다.

이항분포의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따르면

$$E(X)=\boxed{(1)}, \quad V(X)=\boxed{(2)}, \quad \sigma(X)=\sqrt{\boxed{(3)}} \quad (\text{단, } q=1-p)$$

이항분포의 그래프의 성질

이항분포 $B(n, p)$에 대하여 이항분포의 그래프는

① p를 일정하게 하고 n을 크게 하면 점차 좌우 대칭인 모양에 가까워진다.

② n을 일정하게 하고 p를 0.5에 가깝게 하면 좌우 대칭인 모양에 가까워진다.

큰 수의 법칙

어떤 한 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 아무리 작은 양수 h를 택하더라도 다음이 성립한다.

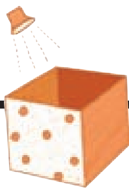
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X}{n}-\boxed{(4)}\right|<h\right)=1$$

| 참고 | 큰 수의 법칙에 의하면 시행 횟수 n을 충분히 크게 하였을 때, 상대도수 $\frac{X}{n}$의 값은 수학적 확률 p와 같아짐을 알 수 있다. 따라서 수학적 확률을 구하기 곤란할 때에는 $\boxed{(5)}$ 확률을 대신 사용한다.



⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 174~180쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) np (2) npq (3) npq (4) p (5) 통계적



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 한 개의 동전을 10번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

〔풀이〕

한 개의 동전을 던지는 것은 독립시행이고, 1회의 시행에서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$이고, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 구하는 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

(단, $x=0,\ 1,\ \cdots,\ 10$)

2. 한 개의 동전을 n번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균이 36일 때, n의 값을 구하여라.

〔풀이〕

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

이때, $\mathrm{E}(X)=36$이므로

$$\frac{1}{2}n=36 \qquad \therefore n=72$$

| 스스로 하기 |

1. 한 개의 주사위를 10번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

〔풀이〕

한 개의 주사위를 던지는 것은 □ 시행이고, 1회의 시행에서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 □ 이다. 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$이고, X는 이항분포 $\mathrm{B}(10,\ \square)$을 따른다.

따라서 구하는 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\square$$

(단, $x=0,\ 1,\ \cdots,\ 10$)

2. 한 개의 주사위를 n번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균이 20일 때, n의 값을 구하여라.

〔풀이〕

한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때, $\mathrm{E}(X)=20$이므로

$$\square\, n=20 \qquad \therefore n=\square$$

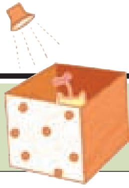
교과서 176, 177쪽

1 발아율이 20 %인 씨앗 100개를 뿌렸을 때, 발아하는 씨앗의 개수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 말하여라.

(2) 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

(3) 확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차를 구하여라.



기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 어떤 회사에서 생산되는 제품 전체의 10 %에 경품 교환권을 부착하였다고 한다. 이 회사에서 생산된 제품 5개를 구입하였을 때, 경품 교환권이 붙은 제품의 개수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

2 어떤 병뚜껑을 500번 던졌을 때, 윗면이 300번 나왔다. 이 병뚜껑을 5번 던져서 4번 이상 윗면이 나오면 이기는 시합을 할 때, 이길 확률을 구하여라.



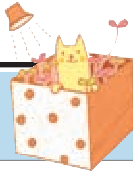
$\mathrm{E}(X)=np$
$\sigma(X)=\sqrt{npq}$
(단, $q=1-p$)

3 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 평균이 12, 표준편차가 3일 때, n, p의 값을 각각 구하여라.

4 한 개의 동전을 10번 던져서 앞면이 나오는 횟수 X에 대하여 상금으로 $(2X+100)$원을 받는 게임이 있다. 이 게임에서 받을 수 있는 상금의 기댓값을 구하여라.



5 어느 농장에서 생산되는 옥수수의 20 %가 특상품이다. 이 농장에서 생산된 옥수수 더미에서 옥수수 100개를 꺼낼 때, 나오는 특상품의 개수를 확률변수 X라고 하자. X^2의 평균을 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 흰 공 3개와 빨간 공 2개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낸 후 다시 넣는 일을 10번 반복할 때, 같은 색의 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

상금의 기댓값은 $\mathrm{E}(25^k)$이다.

2 한 개의 주사위를 10번 던져서 1의 눈이 나온 횟수가 k이면 상금으로 25^k원을 받는 게임에서 상금의 기댓값을 구하여라.

3 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{18}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$$

일 때, $\displaystyle\sum_{x=0}^{18} x^2{}_{18}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$의 값을 구하여라.

확률변수 $(X-a)^2$의 평균
$\Longleftrightarrow \mathrm{E}((X-a)^2)$
$=\mathrm{E}(X^2-2aX+a^2)$

4 한 개의 주사위를 8번 던질 때, 소수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 상수 a에 대하여 확률변수 $(X-a)^2$의 평균의 최솟값을 구하여라.



5 어느 항공 노선에서 예약한 사람이 실제로 탑승하지 않을 확률이 10 %라고 한다. 좌석 수가 200개인 항공기에 210명이 예약하였을 때, 남는 좌석 수의 평균을 구하여라.

4. 정규분포

*[ ] 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

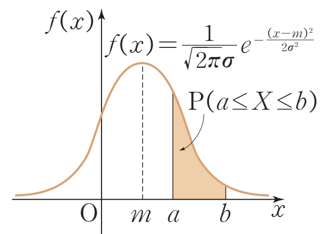
● 정규분포의 뜻

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 식과 같을 때, X는 정규분포를 따른다고 한다.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ (\text{단, } -\infty<x<\infty)$$

평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 기호로 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$과 같이 나타낸다.

● 정규분포곡선의 성질



① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고 점근선은 x축이다.

② 곡선과 x축 사이의 넓이는 [(1)   ]이다.

③ $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이이다.

④ $x=m$일 때, 최댓값 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$을 가진다.

⑤ m이 일정할 때, 표준편차 σ가 커지면 곡선은 양쪽으로 퍼지고 σ가 작아지면 곡선은 뾰족하게 된다.

⑥ σ가 일정할 때, m이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

● 표준정규분포

평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 표준정규분포라 하고, 기호로 [(2)   ]과 같이 나타낸다.

● 정규분포의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-\boxed{(3)}}{\boxed{(4)}}$$

이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

● 이항분포와 정규분포의 관계

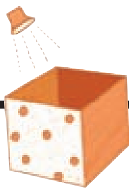
확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ \boxed{(5)})$를 따른다.

| **참고** | n이 $np\ge5$ 또는 $nq\ge5$를 만족할 때, n을 충분히 큰 값으로 생각한다.



…→ 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 181~189쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 1 (2) $\mathrm{N}(0,\ 1)$ (3) m (4) σ (5) npq



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 확률변수 Z가 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $P(-1\le Z\le 2)$ (2) $P(1\le Z\le 3)$

[풀이]

(1) $P(-1\le Z\le 2)$

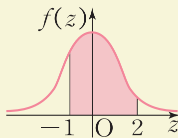
$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$

$=P(0\le Z\le 1)$

$+P(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

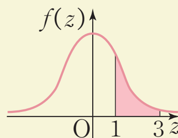


(2) $P(1\le Z\le 3)$

$=P(0\le Z\le 3)-P(0\le Z\le 1)$

$=0.4987-0.3413$

$=0.1574$



2. 확률변수 X가 정규분포 $N(30,\ 2^2)$을 따를 때, 확률 $P(28\le X\le 32)$를 구하여라.

[풀이]

$P(28\le X\le 32)$

$=P\left(\frac{28-30}{2}\le\frac{X-30}{2}\le\frac{32-30}{2}\right)$

$=P(-1\le Z\le 1)$

$=2\times 0.3413=0.6826$

| 스스로 하기 |

1. 확률변수 Z가 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $P(Z\le 1.96)$ (2) $P(-1\le Z\le 3)$

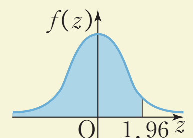
[풀이]

(1) $P(Z\le 1.96)$

$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.96)$

$=0.5+$ ☐

$=$ ☐



(2) $P(-1\le Z\le 3)$

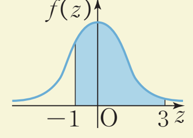
$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 3)$

$=P(0\le Z\le 1)$

$+P(0\le Z\le 3)$

$=0.3413+$ ☐

$=$ ☐



2. 확률변수 X가 정규분포 $N(20,\ 3^2)$을 따를 때, 확률 $P(14\le X\le 26)$을 구하여라.

[풀이]

$P(14\le X\le 26)$

$=P\left(\frac{14-20}{☐}\le\frac{X-20}{☐}\le\frac{26-20}{☐}\right)$

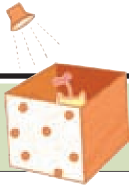
$=P($☐$\le Z\le$☐$)$

$=2\times$ ☐ $=$ ☐

교과서 184쪽

1 확률변수 Z가 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따를 때, 다음 등식을 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

(1) $P(Z\le a)=0.9495$ (2) $P(Z\ge a)=0.1003$



기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

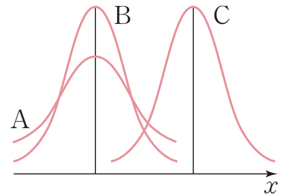
$Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한다.

1 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X \le 66)$　　(2) $\mathrm{P}(63 \le X \le 69)$

(3) $\mathrm{P}(X \ge 69)$　　(4) $\mathrm{P}(54 \le X \le 63)$

2 오른쪽 그림의 곡선 A, B, C는 각각 정규분포를 따르는 세 확률변수 X_{A}, X_{B}, X_{C}의 확률밀도함수의 그래프이다. 곡선 A, B의 대칭축은 서로 같고, 곡선 C는 곡선 B를 평행이동 한 것이다. X_{A}, X_{B}, X_{C}의 평균을 각각 m_{A}, m_{B}, m_{C}라 하고 표준편차를 각각 σ_{A}, σ_{B}, σ_{C}라고 할 때, 다음의 대소를 비교하여라.



(1) m_{A}, m_{B}, m_{C}　　(2) σ_{A}, σ_{B}, σ_{C}

3 한 개의 동전을 400번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수가 190번 이상 220번 이하일 확률을 구하여라.

공장에서 생산되는 제품의 무게를 확률변수 X라고 할 때, 불량품은 $X \ge 40$인 경우이다.

4 어느 공장에서 생산되는 제품의 무게는 평균이 30 g, 표준편차가 5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 제품의 무게가 40 g 이상이면 불량품으로 판정하여 폐기 처분한다. 이 공장에서 하루에 10000개의 제품을 생산할 때, 폐기 처분되는 불량품의 개수를 구하여라.



5 혈압은 최고 혈압과 최저 혈압의 두 가지 수치로 나타내는 데, 최고 혈압이 160 mmHg 이상이고, 최저 혈압이 100 mmHg 이상이면 고혈압이라고 한다. 어느 지역의 40대 주민의 혈압을 측정한 결과 최고 혈압은 평균이 130 mmHg, 표준편차가 15 mmHg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역의 40대 주민 중에서 최고 혈압이 고혈압의 범위에 속하는 사람은 몇 %인지 구하여라.

실생활 문제 해결하기

*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해 보는 문제입니다.

합격자의 최저 점수 구하기

| 문제 | 어느 대학에서는 400점 만점의 입학 전형 자료 점수로 신입생 242명을 선발한다. 이 대학에 지원한 학생 1000명의 입학 전형 자료 점수는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 20^2)$을 따른다고 할 때, 합격자의 최저 점수를 구하여 보자.

1단계_ 문제를 이해하여 보자.

(1) 수험생의 점수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포를 말하여라.

(2) 신입생 1000명 중에서 242명이 선발될 확률을 구하여라.

2단계_ 계획을 세워 보자.

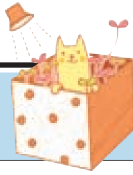
(1) 합격자의 최저 점수를 c라고 놓을 때, 확률 $\mathrm{P}(X \geq c)$를 말하여라.

(2) 확률 $\mathrm{P}(X \geq c)$를 표준화하여라.

3단계_ 문제를 풀어 보자.

(1) 2단계의 (1), (2)를 이용하여 식을 세우고, 표준정규분포표를 이용하여 c의 값을 구하여라.

(2) 합격자의 최저 점수는 몇 점인지 말하여라.



실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(X \le 12) = \mathrm{P}(X \ge 26)$$

일 때, m의 값을 구하여라.

2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(18,\ 2^2)$을 따를 때

$$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413,\ \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$$

를 이용하여 $\mathrm{P}(a \le X \le b) = 0.8185$를 만족하는 정수 $a,\ b$의 값을 각각 구하여라. (단, $a > 15$)

3 어느 고등학교 학생 750명의 등교 시간은 평균이 20분, 표준편차가 4분인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 등교 시간이 12분 이상 16분 이하인 학생은 전체의 몇 %인지 구하여라.

(2) 등교 시간이 28분 이상인 학생의 수를 추측하여라.

등교 시간을 확률변수 X라 하고 X를 표준화하여 주어진 범위에 속할 확률을 구한다.

4 어느 회사에서 238명의 신입 사원을 선발하기 위하여 입사 시험을 실시하였다. 응시자 2000명의 성적은 평균이 800점, 표준편차가 50점인 정규분포를 따른다고 할 때, 합격자의 최저 점수를 구하여라.

5 어느 학교 학생 1000명의 수학 성적은 평균이 70점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 학생이 상위 63등 이내에 들기 위해서는 몇 점 이상을 받아야 하는지 구하여라.

상위 63등 이내에 들 확률은 $\frac{63}{1000} = 0.063$이다.



읽기 자료

대규모 시험에서의 표준 점수

우리나라의 대학 수학 능력 시험이나 미국의 SAT 등과 같이 수험생이 많고, 과목 수도 여러 가지인 경우에는 항상 과목별 난이도의 차이로 인한 문제가 생긴다.

예를 들어 어떤 학생의 국어 점수가 80점, 수학 점수가 75점일 때, 80과 75의 단순 비교만으로는 국어 성적이 좋은지, 수학 성적이 좋은지 알 수 없다.

특히 선택 과목의 경우 선택에 따른 유리함 또는 불리함을 없애고 각 과목 사이의 난이도 조정을 위해서 표준 점수의 도입이 필수적이다. 표준 점수는 전체 응시자의 과목별 평균 점수와 표준편차를 이용하여 각 학생의 과목별 점수가 과목별 전체 평균 점수보다 얼마나 높은지 혹은 얼마나 낮은지를 비교하는 것이다.

표준 점수 중에서 T 점수는 전체 평균이 50점, 표준편차가 10점이 되도록 변환한 것이다.

예를 들어 각 학생의 수학에 대한 T 점수는 다음과 같이 계산한다.

$$T=50+10\times\frac{(\text{각 학생의 수학 원점수})-(\text{수학 점수의 평균})}{(\text{수학 점수의 표준편차})}$$

이 점수는 과목에 상관없이 약 99.7 %의 학생들의 점수가 15점에서 85점 사이에 있게 된다.

| 보기 | 전국 규모의 성취도 평가에서 A, B 두 학생의 과목별 점수가 다음과 같다고 하자.

구분	국어	영어	수학	과학	사회	합계
평균	70	60	50	75	80	
표준편차	8	6	10	7	5	
A 학생	86	75	52	82	90	385
B 학생	78	72	61	89	85	385

여기서 A, B 두 학생의 총점은 385점으로 같음을 알 수 있다.

그러나 다음과 같이 T 점수로 바꾸면 A 학생의 점수가 B 학생의 점수보다 높음을 알 수 있다.

구분	국어	영어	수학	과학	사회	합계
A 학생	70	75	52	60	70	327
B 학생	60	70	61	70	60	321

2 통계적 추정

학습 목표

- 표본평균과 모평균의 관계를 이해할 수 있다.
- 모평균을 추정할 수 있다.

1. 표본조사와 표본평균의 분포

2. 모평균의 추정



매년 우리나라를 찾아오는 철새의 종류와 그 수는 우리 주변 환경에 대한 지표의 하나로 삼을 수 있다. 환경이 깨끗한 곳은 다양하고 많은 철새들이 찾아오지만, 환경이 오염된 곳은 철새들이 거의 찾아오지 않기 때문이다.

하늘을 뒤덮을 만큼 많은 철새의 수는 얼마나 될까? 저수지 곳곳에 둥지를 품은 새 중에서 올해 부화한 새는 몇 마리일까? 이렇게 일일이 조사하기 힘든 궁금증을 해결하고자 할 때, 통계적 방법은 유용한 도구가 된다.

통계적 추정에 들어가기 전에

1. 절댓값

① $|x|=\begin{cases} x\ (x\ge 0) \\ -x\ (x<0) \end{cases}$

② $a\ge 0$일 때

(i) $|x|\le a \iff -a\le x\le a$

(ii) $|x|\ge a \iff x\le -a$ 또는 $x\ge a$

1 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x|\le 1$

(2) $|x-10|\le 2$

(3) $|x-1|\ge 3$

2. 여사건의 확률

① 어떤 시행에서 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고 A^C로 나타낸다.

② $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

2 한 개의 동전을 5번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X=0)$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 1)$

3. 순열의 수와 조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수와 조합의 수는 다음과 같다.

① 순열의 수: ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

② 조합의 수: ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ (단, $0\le r\le n$)

3 남학생 3명, 여학생 3명에 대하여 다음 경우의 수를 구하여라.

(1) 6명을 일렬로 세우는 경우

(2) 남학생 2명, 여학생 2명을 뽑는 경우

4. 표준정규분포

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

4 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 5^2)$을 따를 때, 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X\ge 70)$

(2) $\mathrm{P}(X\le 80)$

1. 표본조사와 표본평균의 분포

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

모집단과 표본

① 조사의 대상이 되는 집단 전체를 모집단이라 하고, 모집단 전체를 조사하는 것을 전수조사라고 한다.

② 모집단의 일부를 추출한 부분집합을 표본이라 하고, 표본을 조사하는 것을 표본조사라고 한다.

③ 모집단의 각 원소가 같은 확률로 추출되게 하는 것을 임의추출법이라고 한다.

모평균과 표본평균

① 모집단의 평균, 분산, 표준편차를 각각 (1) ☐, 모분산, 모표준편차라 하고, 각각 기호로 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

② 표본의 평균, 분산, 표준편차를 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차라 하고, 각각 기호로 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타낸다. 어떤 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하였을 때

$$\text{표본평균: } \overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\text{표본분산: } S^2=\boxed{(2)\quad}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad \text{표본표준편차: } S=\sqrt{S^2}$$

| 참고 | 표본평균, 표본분산, 표본표준편차는 표본에 따라 다른 값을 가지므로 확률변수이다.

표본평균 $\overline{X}$의 분포

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기 n인 임의표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\boxed{(3)\quad}}{\sqrt{n}}$

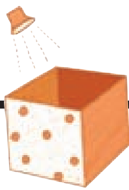
② 모집단의 분포가 정규분포이면 $\overline{X}$는 n의 크기에 관계없이 정규분포 $\mathrm{N}\left(\boxed{(4)\quad},\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

③ 모집단의 분포가 정규분포가 아닐 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\boxed{(5)\quad},\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.



⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 192~201쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 모평균 (2) $\dfrac{1}{n-1}$ (3) σ (4) m (5) m



바 탕 다 지 기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함 께 하 기 |

1. 우리나라 고등학교 학생들의 통계 처리 능력을 알아보기 위해 전국에서 임의로 뽑은 1000명의 학생을 대상으로 테스트를 하였다. 다음을 말하여라.

(1) 모집단 (2) 표본 (3) 표본의 크기

〔풀이〕

(1) 우리나라 고등학교 학생 전체

(2) 임의로 뽑힌 1000명의 고등학생

(3) 1000

2. 주머니 속에 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 적힌 공이 한 개씩 들어 있다. 다음 경우의 수를 구하여라.

(1) 복원추출로 1개씩 2번 꺼내는 경우

(2) 비복원추출로 1개씩 2번 꺼내는 경우

(3) 동시에 2개를 꺼내는 경우

〔풀이〕

(1) 첫 번째 꺼내는 경우가 4가지, 그 각각에 대하여 두 번째 꺼내는 경우가 4가지이므로 구하는 경우의 수는

$$4\times4=16(\text{가지})$$

(2) 첫 번째 꺼내는 경우가 4가지, 그 각각에 대하여 두 번째 꺼내는 경우가 3가지이므로 구하는 경우의 수는

$$4\times3=12(\text{가지})$$

(3) 4개에서 2개를 택하는 조합이므로

$${}_4C_2=6(\text{가지})$$

| 스 스 로 하 기 |

1. 우리나라 농어촌 지역 고등학교의 정보화 환경을 알아보기 위해 농어촌 지역에서 임의로 뽑은 100개의 학교를 조사하였다. 다음을 말하여라.

(1) 모집단 (2) 표본 (3) 표본의 크기

〔풀이〕

(1) 우리나라 ☐ 지역 고등학교 전체

(2) 임의로 뽑힌 ☐ 지역 100개의 고등학교

(3) ☐

2. 주머니 속에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 각각 적힌 카드가 한 개씩 들어 있다. 다음 경우의 수를 구하여라.

(1) 복원추출로 1개씩 2번 꺼내는 경우

(2) 비복원추출로 1개씩 2번 꺼내는 경우

(3) 동시에 2개를 꺼내는 경우

〔풀이〕

(1) 첫 번째 꺼내는 경우가 5가지, 그 각각에 대하여 두 번째 꺼내는 경우가 ☐가지이므로 구하는 경우의 수는

$$5\times\square=\square(\text{가지})$$

(2) 첫 번째 꺼내는 경우가 5가지, 그 각각에 대하여 두 번째 꺼내는 경우가 ☐가지이므로 구하는 경우의 수는

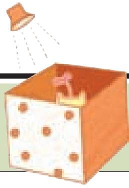
$$5\times\square=\square(\text{가지})$$

(3) 5개에서 2개를 택하는 조합이므로

$${}_\square C_\square=\square(\text{가지})$$

교과서 198쪽

1 정규분포 $N(60,\ 36)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의로 추출할 때, 그 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 각각 구하여라.



기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다.

X	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	1

X의 확률분포에서 평균, 분산을 먼저 구한다.

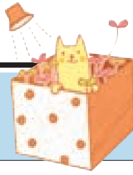
이 모집단에서 크기가 5인 표본을 복원추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $E(\overline{X}^2)$의 값을 구하여라.

2 1, 2, 2, 3, 3, 3의 숫자가 각각 적힌 공이 들어 있는 상자에서 크기가 n인 표본을 복원추출할 때, 공에 적힌 숫자의 평균 $\overline{X}$의 분산이 $\frac{5}{36}$이다. n의 값을 구하여라.

3 어떤 공장에서 생산되는 전구의 수명 시간을 X라고 하면 X는 평균이 2000시간, 표준편차가 200시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제품 중에서 임의로 추출한 100개의 전구의 평균 수명 시간을 $\overline{X}$라고 할 때, 확률 $P(2000 \le \overline{X} \le 2040)$을 구하여라.

4 어느 고등학교 2학년 학생의 키를 X라고 하면 X는 평균이 175 cm, 표준편차가 10 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학생들 중에서 임의로 뽑은 25명의 키의 평균 $\overline{X}$가 177 cm 이상 179 cm 이하일 확률을 구하여라.

5 정규분포 $N(12, 12^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 표본평균을 $\overline{X}$라고 하자. $P(12 \le \overline{X} \le 15) = 0.4332$일 때, n의 값을 구하여라.



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.



1 어느 빵 하나의 무게는 평균이 50 g, 표준편차가 3 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 빵 4개를 하나의 상자에 포장하여 전시할 때, 이 상자 속의 빵의 무게의 합 S에 대하여 확률 $\mathrm{P}(188 \le S \le 206)$을 구하여라.

2 어느 회사에서 생산되는 샤프심의 길이를 X라고 하면 X는 평균이 80 mm, 표준편차가 8 mm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 샤프심 중에서 임의로 n개의 표본을 뽑아 그 평균 길이를 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \le 84) = 0.9938$이 성립한다. n의 값을 구하여라.

3 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 36^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{P}(|m-\overline{X}| \le 8) = 0.95$가 성립한다. n의 값을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 2) = 0.95$로 한다.)

모평균 50의 2 %는 1이다.

4 모평균이 50, 모표준편차가 5인 정규분포를 따르는 어떤 모집단에서 표본 100개를 임의추출한다고 하자. 표본평균이 모평균보다 2 % 이상 크게 나타날 확률을 구하여라.

표본평균을 $\overline{X}$라고 하면 $|\overline{X}-300| \ge 2$인 확률을 구하는 경우이다.

5 어느 도시의 가구당 월 소득은 평균이 300만 원, 표준편차가 10만 원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시에서 임의로 100가구를 표본으로 추출하였을 때, 이 100가구의 월 소득의 평균과 이 도시의 가구당 월 소득의 평균의 차가 2만 원 이상이 될 확률을 구하여라.

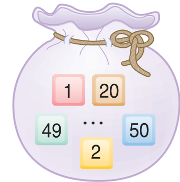
프 로 젝 트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

임의추출의 여러 가지 방법

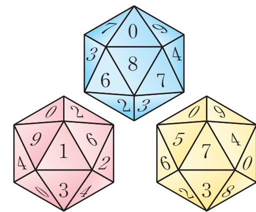
1. 제비뽑기를 이용한 임의추출

학생 수가 50명인 동아리에서 5명을 임의추출하기 위하여 50장의 종이에 1에서 50까지의 번호를 적은 제비를 주머니에 넣는다. 이 제비를 잘 섞은 다음, 임의로 5장을 추출하고, 추출된 제비에 해당하는 번호를 가진 학생을 표본으로 택하면 이것은 임의추출법에 의하여 추출된 것이다.



2. 난수 주사위를 이용한 임의추출

난수 주사위는 오른쪽 그림과 같이 0에서 9까지 숫자를 두 번씩 사용하여 정이십면체의 각 면에 숫자 하나씩을 새긴 것이다.



난수 주사위를 이용하여 300명 중에서 5명을 임의추출하여 보자.

❶ 각 사람에게 000에서 299까지의 번호를 붙인다.

❷ 서로 다른 색의 난수 주사위 3개를 준비한다. 이를테면 빨간색, 파란색, 노란색을 준비한다. 이때, 빨간색, 파란색, 노란색 주사위에서 나오는 숫자를 각각 100의 자리 숫자, 10의 자리 숫자, 1의 자리 숫자로 정하고 3개의 주사위를 동시에 던지면 000에서 999까지의 수를 얻을 수 있다.

❸ 299 이하의 수가 5개 나오면 그 번호를 가진 다섯 사람을 순서대로 택한다.

3. 난수표를 이용한 임의추출

난수표는 0에서 9까지의 숫자를 임의로 배열한 표이다. 부록에 있는 난수표를 이용하여 50명 중에서 5명을 임의추출하는 방법을 알아보자.

41 10 50 81 22	94 80 71 10 68	23 58 20
13 49 57 94 72	78 92 78 78 04	17 00 92
33 87 89 24 77	65 37 12 38 63	76 49 69
15 91 02 97 10	37 14 47 47 79	81 63 34
37 94 89 58 24	29 22 39 42 66	95 14 63
48 06 32 88 07	06 19 13 11 04	45 95 73
92 65 65 69 32	05 63 75 76 57	26 10 31
48 66 49 80 78	34 30 47 61 73	44 31 65
23 50 07 82 24	34 88 84 90 39	20 46 32
47 02 38 86 81	59 77 46 17 55	54 59 00
39 65 34 38 46	26 95 15 80 70	40 06 89
90 36 99 74 53	71 05 53 69 01	49 59 53
46 60 38 92 08	09 16 06 33 02	13 60 78
62 67 74 04 84	75 68 64 11 42	22 88 64
21 17 44 02 71	21 59 79 73 18	24 74 77

❶ 각 사람에게 00에서 49까지의 번호를 붙인다.

❷ 제비뽑기나 난수 주사위를 이용하여 난수표의 시작하는 행, 열을 정한다. 이를테면 이들이 14행 6열일 때 14행을 따로 쓰면 다음과 같다.

62 67 74 04 84 75 68
64 11 42 22 88 64 …

❸ 이 행의 6번째 숫자인 4부터 두 자리씩 오른쪽으로 나아가면서 쓴다. 이때, 이것이 나타내는 두 자리 수 중 50 이상인 것을 지우면 다음과 같다.

40 48 47 ~~56~~ ~~86~~ 41 14 22 28 ~~86~~ …

❹ 이와 같이 얻은 수 중에서 처음 5개의 수 40, 48, 47, 41, 14의 번호를 가진 사람을 택한다.

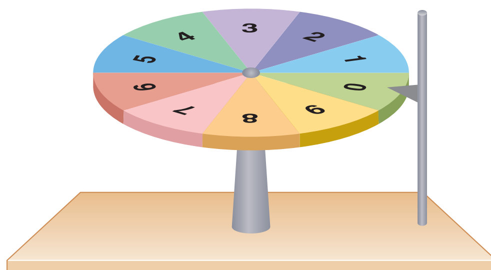


읽기 자료

KS(Korea Standard) 난수표

난수표를 최초로 만든 사람은 팁페트이다. 그 후 여러 종류의 난수표가 나왔는데 이 책의 부록에 있는 KS 난수표는 1963년 박한식 교수가 만든 것으로 우리나라 최초의 난수표이다. KS 난수표는 부록과 같은 것이 모두 40장으로 구성되어 있다. 따라서 숫자의 개수는 40000개이다.

이 난수표를 만들 당시 우리나라에 전자계산기가 없었기 때문에 오른쪽 그림과 같은 룰렛을 돌려서 나온 숫자를 하나씩 기록해 나가는 수작업으로 만들었다. 그런데 난수표는 숫자가 임의로 배열된 것이므로 그 임의성을 검정해야 한다. KS 난수표의 임의성을 검정하기 위하여 한 자리 검정, 두 자리 검정, 게프 검정, 포커 검정을 하였다.



1. 한 자리 검정

이것은 숫자 각각을 한 자리 수로 볼 때 난수표의 숫자들이 임의로 배열되어 있는가를 보는 것이다. 이들 속에 들어 있는 0, 1, …, 9의 개수를 세어서 이상적인 개수와의 차이를 검정한다. 한 장에 1000개의 숫자가 들어 있으므로 각각 10개씩 들어 있는 것이 이상적이다.

2. 두 자리 검정

이것은 숫자를 두 개씩 묶어서 두 자리 수로 볼 때 난수표의 수들이 임의로 배열되어 있는가를 보는 것이다. 이들 속에 있는 00, 01, …, 99의 개수를 세어서 이상적인 개수와의 차이를 검정한다. 한 장에 500개의 수가 들어 있으므로 각각 5개씩 들어 있는 것이 이상적이다.

3. 게프 검정

이를테면 1000개의 숫자의 나열에서 0과 0 사이에 있는 숫자의 개수에 대한 통계를 내서 이들 개수가 나오는 확률과 대비하여 검정하는 것이다.

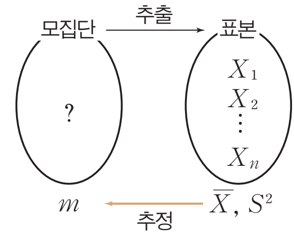
포커 검정은 여기서 다루지 않기로 한다.

2. 모평균의 추정

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 추정의 뜻

표본에서 얻은 정보를 이용하여 모집단의 평균, 표준편차 등을 추측하는 것을 추정이라고 한다.



● 신뢰도와 신뢰구간의 뜻

표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라고 할 때, 다음과 같은 구간

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

를 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간이라고 한다.

'신뢰도 95 %인 신뢰구간' 의 뜻은 크기 n인 표본을 여러 번 추출하여 신뢰구간을 만들 때, 이들 중 모평균 m을 포함하는 것이 약 95 %라는 의미이다.

| 참고 | 모표준편차의 값을 알 수 없는 경우에 표본의 크기 n이 클 때에는 σ 대신 표본표준편차 S를 이용할 수 있다.

● 모평균 m의 신뢰구간

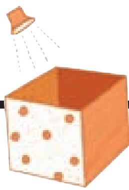
① 신뢰도 95 %인 신뢰구간: $\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰도 99 %인 신뢰구간: $\overline{x}-$ (1) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+$ (2) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$



⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 202~206쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 2.58 (2) 2.58



바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 어떤 과수원에서 생산하는 사과의 무게는 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 사과 중에서 100개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 118 g이었다. 이 과수원에서 생산하는 사과 전체의 평균 무게를 m g이라고 할 때, m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하여라.

[풀이]

모표준편차 $\sigma=10$, 표본평균 $\bar{x}=118$, 표본의 크기 $n=100$이므로 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$118-1.96\frac{10}{\sqrt{100}}\le m\le 118+1.96\frac{10}{\sqrt{100}}$$

$\therefore$ $116.04\le m\le 119.96$

| 스스로 하기 |

1. 어떤 과수원에서 생산하는 배의 무게는 표준편차가 25 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 배 중에서 100개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 235 g이었다. 이 과수원에서 생산하는 배 전체의 평균 무게를 m g이라고 할 때, m에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구하여라.

[풀이]

모표준편차 $\sigma=25$, 표본평균 $\bar{x}=235$, 표본의 크기 $n=100$이므로 모평균 m에 대하여 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$\bar{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$235-2.58\frac{\square}{\sqrt{100}}\le m\le 235+2.58\frac{\square}{\sqrt{100}}$$

$\therefore$ $\square\le m\le\square$

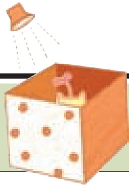
교과서 204쪽

1 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 모평균 m의 신뢰도 a %에서의 신뢰구간은

$$\overline{X}-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\ \left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{a}{100}\right)$$

이다. 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

ㄱ. 신뢰도를 높이면 신뢰구간의 길이가 길어진다.
ㄴ. 표본평균 $\overline{X}$가 커지면 신뢰구간의 길이가 길어진다.
ㄷ. 표본의 크기를 크게 하면 신뢰구간의 길이가 짧아진다.



기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 어떤 전구 공장에서 생산된 전구의 수명 시간은 정규분포를 따른다고 한다. 이 전구 중에서 100개를 임의추출하여 수명 시간을 조사하였더니 평균이 1000시간, 표준편차가 50시간이었다. 이 공장에서 생산된 전구 전체의 평균 수명 시간 m에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 신뢰도 95 %인 신뢰구간 (2) 신뢰도 99 %인 신뢰구간

2 어느 논에서 자란 벼 이삭의 이삭당 낟알 수는 평균이 m알인 정규분포를 따른다고 한다. 이삭 100개를 임의추출하여 이삭당 낟알 수를 조사하였더니 평균이 80알, 표준편차가 20알이었다. 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간이 $76.08 \le m \le a$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

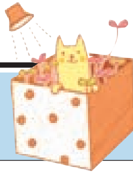


$[\overline{X}-0.1\sigma,\ \overline{X}+0.1\sigma]$
$\Longleftrightarrow \overline{X}-0.1\sigma \le m \le \overline{X}+0.1\sigma$

3 정규분포를 이루는 모집단의 표준편차를 σ라고 할 때, 이 모집단에서 추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 한다. 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간이 $[\overline{X}-0.1\sigma,\ \overline{X}+0.1\sigma]$가 되게 하려고 할 때, n의 값을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 2)=0.95$로 한다.)

4 어느 회사에서 생산되는 치약의 무게는 표준편차가 11 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 치약 중 n개의 표본을 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 80 g이었다. 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간이 $78 \le m \le 82$일 때, n의 값을 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(|Z| \le 2)=0.95$로 한다.)



실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 어떤 공장에서 생산된 제품의 무게는 표준편차가 40 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제품 중에서 임의로 표본을 추출하여 신뢰도 95 %로 모평균을 추정하려고 할 때, 모평균과 표본평균의 차를 4 g 이하로 추정하려면 표본을 몇 개 이상 택해야 하는지 구하여라.

신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 95 %로 모평균을 추정하였더니 신뢰구간의 길이는 $3.92d$이었다. 표본의 크기를 $4n$으로 하여 신뢰도 99 %로 모평균을 추정할 때, 신뢰구간의 길이를 d에 대한 식으로 나타내어라.

3 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 임의로 추출한 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$에 의한 모평균 m의 신뢰구간은 신뢰도 98 %로 추정하면

$$\overline{X}-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$$

이다. 상수 k의 값을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(|Z|\le2.33)=0.98$로 한다.)

4 표준편차가 1로 알려진 정규분포를 따르는 모집단의 평균에 대하여 신뢰도 α %인 신뢰구간을 표본평균을 이용하여 구하는데 신뢰구간의 길이를 2로 하려면 표본의 크기가 4이어야 한다. 신뢰구간의 길이를 1로 하려고 할 때, 필요한 표본의 크기를 구하여라.



읽기 자료

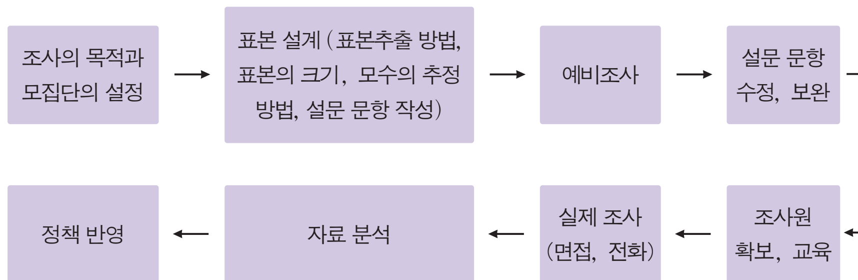
여론 조사란 무엇인가?

민주주의의 기본은 국민의 뜻에 따라 사회와 국가를 운영하는 것이다. 이때, 국민의 뜻을 객관적이고도 구체적으로 파악하는 것이 중요한데, 그 수단으로써 여론 조사가 많이 쓰인다.

영국의 정치학자인 브라이스(Bryce, J.)는 이미 19세기 말에, 민주주의의 발전에서 마지막 단계는 국민의 의지가 즉시 파악되는 것이라고 예견하였다. 오늘날은 통계적 기법의 발전, 정보 통신 기술의 발달, 시민 의식의 성숙 등에 힘입어 어떤 사건에 대한 여론 조사는 거의 순식간에 매우 정확하게 이루어지고 있다. 투표의 종료 시각과 동시에 발표되는 당선자의 예측에서 이러한 사실을 확인할 수 있다. 이러한 면에서 볼 때, 우리 사회는 브라이스가 예견한 민주주의 발전의 마지막 단계에 이르렀다고 할 수 있다.

이와 같이 여론 조사는 처음에는 정치적 문제에서 출발하였으나 현재는 사회 · 과학 분야 뿐만 아니라 기업 경영에서도 많이 활용되고 있다. 오늘날 소비자의 여론에 귀를 기울이지 않는 기업이 하나도 없다고 하여도 과언이 아니다.

여론 조사의 대부분은 표본조사로 이루어지는데, 그 과정을 살펴보면 다음과 같다.



여론 조사의 결과는 정확해야 하고, 신뢰할 수 있어야 한다. 이러한 정확성과 신뢰성을 확보하기 위하여 여론 조사를 시행하고 그 결과를 발표할 때 다음 사항을 제시하여야 한다.

- 필수 사항: 조사 기관명, 조사 대상, 조사 시기, 유효 표본의 크기와 구체적인 조사 지역
- 권장 사항: 표본추출 방법, 조사 방법(면접, 전화, 인터넷 등), 설문지, 무응답자의 비율



우리나라의 대표적 여론 조사 기관 사이트 찾아보기

- http://www.gallup.co.kr
- http://www.kric.com

실생활 문제 해결하기

*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해 보는 문제입니다.

월 평균 전자 상거래 지출액

| 문제 | 다음 기사는 국내의 인터넷 사용 실태를 조사한 결과의 보도 자료의 일부분이다. 월 평균 전자 상거래 지출액에 대한 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하여 보자. (단, 전자 상거래 지출액은 표준편차가 14000원인 정규분포를 따른다.)

국민 80 % 뉴스 · 신문은 '인터넷'으로 접해

인터넷 여론 기관인 ○○○코리아는 XXX코리아와 함께 지난 7월부터 8월까지 국내 인터넷 사용 실태 조사를 실시한 결과 인터넷 이용자 수는 80.5 %로 나타났다. '뉴스와 신문'을 보기 위해 인터넷을 사용한 응답자는 무려 78.3 %에 달했다.

〈중략〉

전자 상거래로 구매한 경험이 있는 사람은 전체 인구의 63.2 %로 지난해 9월에 비해 2.1 %포인트 증가했다.
성별로 보면 남성이 59.8 %, 여성이 67.1 %로 나타났으며, 월 평균 전자 상거래 지출액은 평균 6만 7000원으로 조사됐다. 전자 상거래를 통해 주로 구매하는 상품 · 서비스는 남성은 가전제품, 컴퓨터 관련 제품의 구매 비중이 높았으며, 여성은 의류, 화장품 · 미용 제품군을 주로 구매하는 것으로 조사됐다.

※여론 조사 개요
○ 조사 기간: 2008년 7월~8월
○ 조사 대상: 전국 만 7세부터 65세 남녀 7000명
○ 오차 범위: 신뢰수준 95 %, 오차 범위 ±0.77 %
○ 조사 의뢰: ○○○코리아

1단계_ 문제를 이해하여 보자.

(1) 표본의 크기를 구하여라.

(2) 표본평균 $\bar{x}$의 값을 구하여라.

2단계_ 계획을 세워 보자.

표본의 크기가 n이고, 표본평균의 값이 $\bar{x}$일 때, 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 말하여라.

3단계_ 문제를 풀어 보자.

2단계의 신뢰구간에 $n=7000$, $\bar{x}=67000$을 대입하여 신뢰구간을 구하여 보자. (단, 소수 첫째 자리에서 반올림한다.)

V 대단원 확인하기

계산

1 ★

제비뽑기를 이용하여 남자 4명, 여자 4명 중에서 3명의 대표를 뽑으려고 한다. 대표로 뽑히는 남자의 수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(2) 확률변수 X의 평균과 분산을 구하여라.

이해

2 ★★

확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=ax+1\ (0\le x\le 2)$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 상수 a의 값

(2) $\mathrm{P}\left(0\le X\le \frac{1}{2}\right)$

계산

3 ★

확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=20$, $\mathrm{V}(X)=4$일 때, 확률변수 $Y=2X-10$에 대하여 $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{V}(Y)$, $\sigma(Y)$를 구하여라.

문제 해결

4 ★★

어느 버스 정류장에 도착하는 버스 중에서 10 %가 연착한다고 한다. 어느 날 이 정류장에 버스 20대가 도착할 때, 연착하는 버스가 1대 이하일 확률을 구하여라.

$\left(\text{단, } \left(\frac{9}{10}\right)^{19}=0.1351,\ \left(\frac{9}{10}\right)^{20}=0.1216\text{으로 한다.}\right)$



문제 해결

5 ★★

어느 공연에 예약한 사람이 사전 통보 없이 오지 않을 확률이 5 %라고 한다. 공연장의 좌석 수가 70일 때, 72명이 예약한 경우 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라.

(단, $0.95^{71}=0.0262$, $0.95^{72}=0.0249$로 한다.)

문제 해결

6
★★
어떤 회사의 통신망을 이용하는 사람들의 접속 시간은 평균이 40분, 표준편차가 5분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 통신망 이용자 중에서 10000명을 임의로 뽑을 때, 접속 시간이 50분을 넘는 사람의 수를 추측하여라.

문제 해결

7
★★
모집 인원이 10명인 어느 교향악단의 오디션에 100명이 지원하였다. 오디션 결과 지원자의 성적의 평균은 50점, 표준편차는 10점이었다. 지원자 전체의 성적이 정규분포를 따를 때, 합격자의 최저 점수를 구하여라.

(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28) = 0.4$로 한다.)



이해

8
★★
확률변수 X의 평균이 20, 표준편차가 4인 모집단에서 크기 8인 표본을 임의추출하였다. 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\overline{X}^2$의 평균을 구하여라.

문제 해결

9
★★★
어느 공장에서 생산하는 전구의 수명 시간은 평균이 1400시간, 표준편차가 100시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 전구 중에서 n개를 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X} \ge 1350 + \frac{165}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.90$이 성립하는 n의 최솟값을 구하여라.

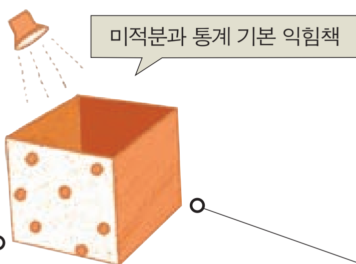
(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28) = 0.4$로 한다.)

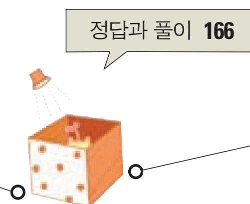
문제 해결

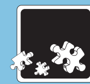
10
★★★
어느 제과점에서 만드는 샌드위치의 무게는 표준편차가 0.5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제과점에서 만든 샌드위치 중에서 25개를 임의추출하여 무게를 재었더니 표본평균이 32.2 g이었다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 샌드위치의 무게의 평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 구하여라.

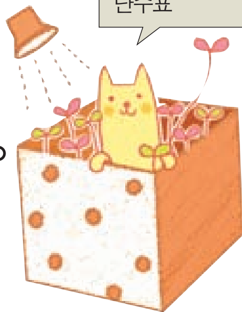
(2) 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 폭을 0.2 g 이내로 하기 위한 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.


미적분과 통계 기본 익힘책


정답과 풀이 166



부록







Ⅰ. 함수의 극한과 연속

1. 함수의 극한

함수의 극한에 들어가기 전에 / P. 11

1 (1) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$이므로 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$이므로 수열 $\left\{2+\frac{1}{n}\right\}$은 수렴한다.

(3) $\lim_{n\to\infty}\{1+(-1)^n\}=\begin{cases}0 & (n\text{이 홀수})\\ 2 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

로 진동하므로 수열 $\{1+(-1)^n\}$은 발산한다.

(4) $\lim_{n\to\infty}(n^2+1)=\infty$이므로 수열 $\{n^2+1\}$은 발산한다.

2 (1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

$=2\cdot2+3=7$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n}$

$=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$

3 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}$

$=\frac{2-0}{1+0}=2$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}$

$=\frac{2+0}{1+0}=2$

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=0$

4 모든 자연수 n에 대하여

$1-\frac{2}{n}\le a_n\le1+\frac{2}{n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)$

$1\le\lim_{n\to\infty}a_n\le1\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=1$

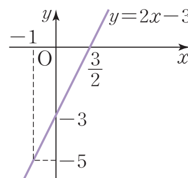
1. 함수의 수렴과 발산

바탕 다지기 / P. 13

| 스스로 하기 |

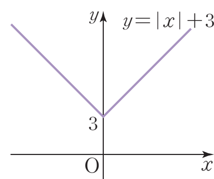
1 (1) 1, 1 (2) 3, 3 (3) 1, 1

1 (1) $f(x)=2x-3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



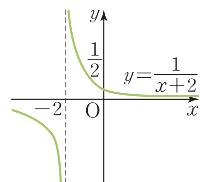
x가 -1과 다른 값을 가지면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -5에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to-1}(2x-3)=-5$

(2) $f(x)=|x|+3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x가 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to0}(|x|+3)=3$

2 $f(x)=\frac{1}{x+2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) x가 0과 다른 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\frac{1}{2}$에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}$

(2) (i) x가 -2보다 큰 값을 가지면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{1}{x+2} = \infty$$

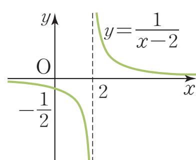
(ii) x가 -2보다 작은 값을 가지면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{1}{x+2} = -\infty$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \to -2} \frac{1}{x+2}$은 존재하지 않는다.

기본 익히기 / P. 14

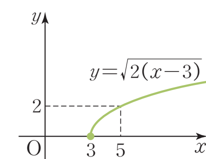
1 (1) $f(x)=\frac{1}{x-2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

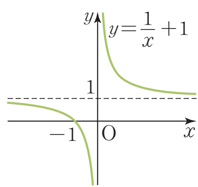
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

(2) $f(x)=\sqrt{2(x-3)}$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값도 한없이 커지므로



$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{2(x-3)} = \infty$$

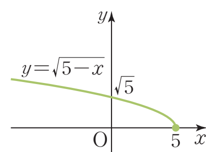
(3) $f(x)=\frac{1}{x}+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. x가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때,



$f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}+1\right) = 1$$

(4) $f(x)=\sqrt{5-x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. x가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때,



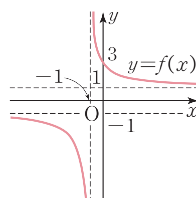
$f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{5-x} = \infty$$

2 $f(x)=\frac{x+2|x|+3}{2x+|x|+1}$에서

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3x+1}+1 & (x \geq 0) \\ \frac{4}{x+1}-1 & (x<0) \end{cases}$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $y=f(x)$의 그래프에서 x가 1과 다른 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\frac{3}{2}$에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{3}{2}$$

ㄴ. (i) x가 -1보다 큰 값을 가지면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \infty$$

(ii) x가 -1보다 작은 값을 가지면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = -\infty$$

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x \to -1+0} f(x) \neq \lim_{x \to -1-0} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \to -1} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

ㄹ. $y=f(x)$의 그래프에서 x가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

3 $a>3$이므로 $x \to 2$일 때, $|x-a|=a-x$

$$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{|x-a|-(a-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{a-x-a+2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

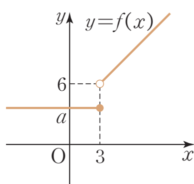
4 $x \to 1$일 때, $f(x) \to 2$이고, $f(x)+1 \to 3$이므로

$$\lim_{x \to 1} \{f(x)+1\} = 3$$

5 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{|x-3|} & (x>3) \\ a & (x\le 3) \end{cases}$ 에서

$f(x)=\begin{cases} x+3 & (x>3) \\ a & (x\le 3) \end{cases}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x가 3보다 큰 값을 가지면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 6에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 3+0} f(x)=6$

$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0} a=a$

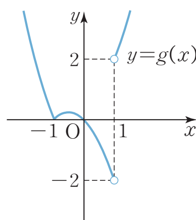
$\lim_{x\to 3} f(x)$가 존재하려면 $x=3$에서 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 같아야 하므로 $a=6$

실력 키우기 / P. 15

1 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$로 놓으면

$g(x)=\begin{cases} x(x+1) & (x\le -1 \text{ 또는 } x>1) \\ -x(x+1) & (-1<x<1) \end{cases}$

이므로 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



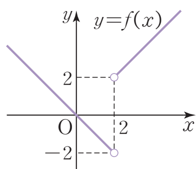
$\therefore \lim_{x\to 1-0} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=-2$

2 (1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$로 놓으면

$f(x)=\begin{cases} x & (x>2) \\ -x & (x<2) \end{cases}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\lim_{x\to 2+0} \dfrac{x^2-2x}{|x-2|}=2$

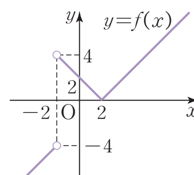
$\lim_{x\to 2-0} \dfrac{x^2-2x}{|x-2|}=-2$

따라서 $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$는 존재하지 않는다.

(2) $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$로 놓으면

$f(x)=\begin{cases} x-2 & (x<-2 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x+2 & (-2<x<2) \end{cases}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

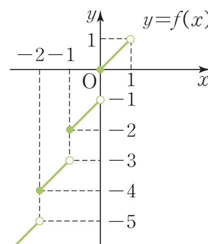


$\lim_{x\to -2+0} \dfrac{|x^2-4|}{x+2}=4$

$\lim_{x\to -2-0} \dfrac{|x^2-4|}{x+2}=-4$

따라서 $\lim_{x\to -2} \dfrac{|x^2-4|}{x+2}$는 존재하지 않는다.

3 $f(x)=x+[x]$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) x가 -2보다 큰 값을 가지면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -4에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to -2+0} (x+[x])=-4$

(2) x가 -2보다 작은 값을 가지면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -5에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to -2-0} (x+[x])=-5$

4 $\lim_{x\to 2+0} f(x)=4+2a$, $\lim_{x\to 2-0} f(x)=1+a$

즉, $4+2a=1+a$

$\therefore a=-3$

5 (1) $\lim_{x\to 100+0} H(x)=840$

(2) $\lim_{x\to 100-0} H(x)=300$

(3) (i) x가 0보다 큰 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $H(x)$의 값은 190에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to +0} H(x)=190$

(ii) x가 0보다 작은 값을 가지면서 0에 한없이 가까워질 때, $H(x)$의 값은 110에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to -0} H(x)=110$

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x\to +0} H(x)\ne \lim_{x\to -0} H(x)$이므로 $\lim_{x\to 0} H(x)$는 존재하지 않는다.

2. 극한값의 계산

바탕 다지기 / P. 17

| 스스로 하기 |

1 (1) 1, 1, 1, 1 (2) 4, 1, 1, 1

1 (1) $\lim_{x\to a}\{2f(x)+g(x)\}=2\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$
$=2\cdot 2+(-4)=0$

(2) $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$
$=2\cdot(-4)=-8$

2 (1) $\lim_{x\to 3}(x^2+3x)=3^2+3\cdot 3=18$

(2) $\lim_{x\to 1}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=1^2+\frac{1}{1}=2$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$
$=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)$
$=2^2+2\cdot 2+4=12$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{9+x}-3)(\sqrt{9+x}+3)}{x(\sqrt{9+x}+3)}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{(9+x)-9}{x(\sqrt{9+x}+3)}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+x}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$

기본 익히기 / P. 18

1 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(2x+1)=2\cdot 0+1=1$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+9x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+10)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$
$=\lim_{x\to 1}\frac{x+10}{x+1}=\frac{1+10}{1+1}$
$=\frac{11}{2}$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$
$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+7)-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$
$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}$
$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$
$=\frac{1}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$

2 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^2}{1+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-2}{\frac{1}{x^2}+3}$
$=\frac{0-2}{0+3}=-\frac{2}{3}$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-x)$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+5}-x)(\sqrt{x^2+4x+5}+x)}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4x+5)-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}$
$=\frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=2$

3 (1) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)}=\frac{2-2}{1}=0$

(3) $\lim_{x\to -2+0}\frac{f(x)}{x+2}=\infty$

$\lim_{x\to -2-0}\frac{f(x)}{x+2}=-\infty$

따라서 $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}$는 존재하지 않는다.

(4) $\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x+2}$
$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)f(x)}{x+2}$
$=\lim_{x\to -2}(x-2)f(x)$
$=(-2-2)\cdot 1=-4$

4 (1) $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$에서

(i) $x\to+0$일 때, $\sin x>0$이므로

$$-\sin x\le\sin x\sin\frac{1}{x}\le\sin x$$

$$\lim_{x\to+0}(-\sin x)\le\lim_{x\to+0}\sin x\sin\frac{1}{x}\le\lim_{x\to+0}\sin x$$

$$0\le\lim_{x\to+0}\sin x\sin\frac{1}{x}\le 0$$

$$\therefore \lim_{x\to+0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0$$

(ii) $x\to-0$일 때, $\sin x<0$이므로

$$\sin x\le\sin x\sin\frac{1}{x}\le-\sin x$$

$$\lim_{x\to-0}\sin x\le\lim_{x\to-0}\sin x\sin\frac{1}{x}\le\lim_{x\to-0}(-\sin x)$$

$$0\le\lim_{x\to-0}\sin x\sin\frac{1}{x}\le 0$$

$$\therefore \lim_{x\to-0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0$$

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x\to0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0$

(2) $-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$에서

(i) $x\to+0$일 때, $x^2+2x>0$이므로

$$-(x^2+2x)\le(x^2+2x)\cos\frac{1}{x}\le x^2+2x$$

$$\lim_{x\to+0}(-x^2-2x)\le\lim_{x\to+0}(x^2+2x)\cos\frac{1}{x}\le\lim_{x\to+0}(x^2+2x)$$

$$0\le\lim_{x\to+0}(x^2+2x)\cos\frac{1}{x}\le 0$$

$$\therefore \lim_{x\to+0}(x^2+2x)\cos\frac{1}{x}=0$$

(ii) $x\to-0$일 때, $x^2+2x<0$이므로

$$x^2+2x\le(x^2+2x)\cos\frac{1}{x}\le-(x^2+2x)$$

$$\lim_{x\to-0}(x^2+2x)\le\lim_{x\to-0}(x^2+2x)\cos\frac{1}{x}\le\lim_{x\to-0}(-x^2-2x)$$

$$0\le\lim_{x\to-0}(x^2+2x)\cos\frac{1}{x}\le 0$$

$$\therefore \lim_{x\to-0}(x^2+2x)\cos\frac{1}{x}=0$$

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x\to0}(x^2+2x)\cos\frac{1}{x}=0$

5 $\lim_{x\to50}f(x)=\lim_{x\to50}\frac{6000x}{100-x}=\frac{6000\cdot50}{100-50}=6000$

실력 키우기 / P. 19

1 (1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x+2}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2-(x+2)}{x+2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{x+2}=-\frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{2}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(\sqrt{x+1}-1)}{x\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{x+1+\sqrt{x+1}}=1$$

(3) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{(x-1)\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(x-1)\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-1}{\sqrt{x}+x}=-\frac{1}{2}$$

(4) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2}-4}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4\cdot(-t)}{\sqrt{(-t)^2+2}-4}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4\left(\sqrt{1+\frac{2}{t^2}}+\frac{4}{t}\right)}{1-\frac{14}{t^2}}=-4$$

2 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+xf(x)}{x^2-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{f(x)}{x}}{1-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}=4$

3 (1) $x\to-1$일 때, (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$$\lim_{x\to-1}(2x^2+ax+b)=2-a+b=0$$

$$\therefore b=a-2$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+ax+a-2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x+a-2)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}(2x+a-2)=-2+a-2=5$$

$$\therefore a=9,\ b=7$$

(2) $x \to 4$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$a\sqrt{4}+b=2a+b=0 \qquad \therefore b=-2a$

$$\lim_{x \to 4}\frac{a\sqrt{x}-2a}{x-4}=\lim_{x \to 4}\frac{a(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{x \to 4}\frac{a}{\sqrt{x}+2}=\frac{a}{\sqrt{4}+2}=1$$

$\therefore a=4,\ b=-8$

4 $\displaystyle\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x-1}=8$에서 $x \to 1$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\displaystyle\lim_{x \to -1}\frac{f(x)}{x+1}=-8$에서 $x \to -1$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\therefore f(-1)=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $f(x)=(x+1)(x-1)(ax+b)$로 놓으면

$$\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{(x+1)(x-1)(ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1}(x+1)(ax+b)$$
$$=2(a+b)=8$$

$\therefore a+b=4$ $\cdots\cdots$ ㉢

$$\lim_{x \to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x \to -1}\frac{(x+1)(x-1)(ax+b)}{x+1}$$
$$=\lim_{x \to -1}(x-1)(ax+b)$$
$$=-2(-a+b)=-8$$

$\therefore -a+b=4$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $\quad a=0,\ b=4$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-1)4=4(x^2-1)$

5 (i) $x>1$일 때

$\displaystyle\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}$이므로

$$\lim_{x \to 1+0}2x(x-2)\le\lim_{x \to 1+0}\frac{f(x)}{x-1}$$
$$\le\lim_{x \to 1+0}(x^3-x^2-x-1)$$

$$-2\le\lim_{x \to 1+0}\frac{f(x)}{x-1}\le-2$$

$$\therefore \lim_{x \to 1+0}\frac{f(x)}{x-1}=-2$$

(ii) $x<1$일 때

$\displaystyle\frac{2x^3-6x^2+4x}{x-1}\ge\frac{f(x)}{x-1}\ge\frac{x^4-2x^3+1}{x-1}$이므로

$$\lim_{x \to 1-0}2x(x-2)\ge\lim_{x \to 1-0}\frac{f(x)}{x-1}$$
$$\ge\lim_{x \to 1-0}(x^3-x^2-x-1)$$

$$-2\ge\lim_{x \to 1-0}\frac{f(x)}{x-1}\ge-2$$

$$\therefore \lim_{x \to 1-0}\frac{f(x)}{x-1}=-2$$

(i), (ii)에 의하여 $\displaystyle\lim_{x \to 1+0}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x \to 1-0}\frac{f(x)}{x-1}=-2$

이므로 $\quad\displaystyle\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-2$

6 점 $P(t,\ \sqrt{t})$에서 $\overline{OP}=\sqrt{t^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2+t}$이므로 점 Q의 좌표는 $\quad Q(0,\ \sqrt{t^2+t})$

두 점 $P(t,\ \sqrt{t})$, $Q(0,\ \sqrt{t^2+t})$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-\sqrt{t}=\frac{\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t}}{0-t}(x-t)$$

$$y=-\frac{\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t}}{t}x+\sqrt{t^2+t}$$

이 직선의 x절편의 좌표가 $(f(t),\ 0)$이고, 이 직선이 점 $(f(t),\ 0)$을 지나므로

$$0=-\frac{\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t}}{t}f(t)+\sqrt{t^2+t}$$

$$\therefore f(t)=\frac{t\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t}}$$

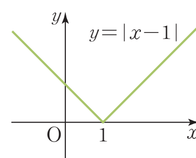
$$\therefore \lim_{t \to 0}f(t)=\lim_{t \to 0}\frac{t\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t}}$$
$$=\lim_{t \to 0}\frac{t\sqrt{t^2+t}(\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t})}{(t^2+t)-t}=2$$

2. 함수의 연속

함수의 연속에 들어가기 전에 / P. 21

1 (1) $|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\ge1) \\ -x+1 & (x<1)\end{cases}$

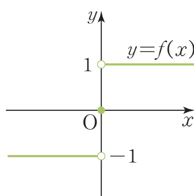
이므로 $y=|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 함수 $y=|x-1|$은 연결된다.



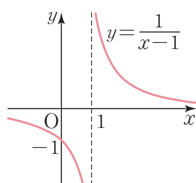
(2) $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 이라고 하면

$f(x)=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$ 이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

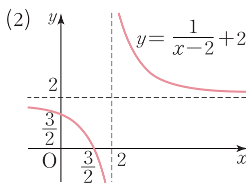
따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=0$에서 연결되지 않는다.



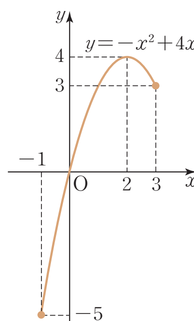
2 (1)



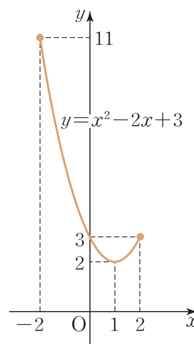
(2)



3 (1) $y=-x^2+4x$
$=-(x-2)^2+4$
이므로 $-1\le x\le 3$에서 함수 $y=-x^2+4x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 함수 $y=-x^2+4x$는 $x=2$일 때 최댓값 4, $x=-1$일 때 최솟값 -5를 가진다.



(2) $y=x^2-2x+3$
$=(x-1)^2+2$
이므로 $-2\le x\le 2$에서 함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 함수 $y=x^2-2x+3$은 $x=-2$일 때 최댓값 11, $x=1$일 때 최솟값 2를 가진다.



4 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근이 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로
$x^2+ax+b=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$
$\therefore a=-2, b=-3$

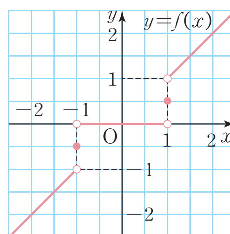
1. 함수의 연속

프로젝트 / P. 23

1단계 (i) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$이므로 무한등비수열 $\{r^n\}$은 발산한다.
(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로 무한등비수열 $\{r^n\}$은 1로 수렴한다.
(iii) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로 무한등비수열 $\{r^n\}$은 0으로 수렴한다.
(iv) $r\le -1$일 때, 무한등비수열 $\{r^n\}$은 진동하므로 발산한다.

2단계 (i) $x=1$일 때, $f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n+1}}{1+1^{2n}}=\frac{1}{2}$
(ii) $x=-1$일 때, $f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{1+(-1)^{2n}}$
$=-\frac{1}{2}$
(iii) $|x|<1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=0$
(iv) $|x|>1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=x$

3단계



4단계 위의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 x에서 연속이다.

논술/수행평가 과제

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$에서

(i) $x=1$일 때, $f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1^{2n}}{1+1^{2n}}=0$

(ii) $x=-1$일 때, $f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^{2n}}{1+(-1)^{2n}}=0$

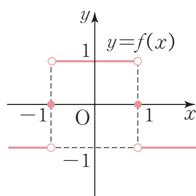
(iii) $|x|<1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=1$

(iv) $|x|>1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=-1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} -1 & (|x|>1) \\ 0 & (|x|=1) \\ 1 & (|x|<1) \end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 x에서 연속이다.

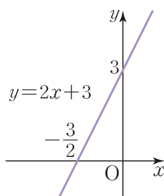


바탕 다지기 / P. 24

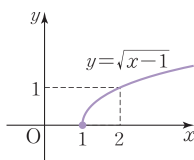
| 스스로 하기 |

1 (1) 4 (2) 4, 2
(3) $\neq$ (4) 불연속

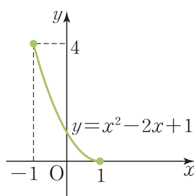
1 (1) 함수 $y=2x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.



(2) 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 연속인 구간은 $[1, \infty)$이다.

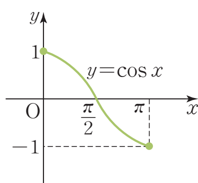


2 (1) $f(x)=x^2-2x+1$
$=(x-1)^2$
이므로 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 4, $x=1$일 때 최솟값 0을 가진다.

(2) $f(x)=\cos x$이므로 구간 $[0, \pi]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 1, $x=\pi$일 때 최솟값 -1을 가진다.



기본 익히기 / P. 25

1 ㄱ. $\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}[x]=-1$
$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}[x]=0$
$\lim_{x\to-0} f(x)\neq\lim_{x\to+0} f(x)$이므로
$\lim_{x\to0} f(x)$가 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
ㄴ. $g(0)=0$, $\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0}|x(x-1)|=0$
$g(0)=\lim_{x\to0} g(x)$
따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. $h(0)$이 존재하지 않는다.
따라서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
그러므로 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄴ이다.

2 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이어야 한다. $f(1)=a$
$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(x^2-2x)=-1$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$f(1)=\lim_{x\to1} f(x)$ $\therefore a=-1$

3 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$에서

(ⅰ) $x=1$일 때, $f(1)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^{2n}}{1^{2n}+1}=\dfrac{1}{2}$

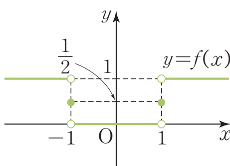
(ⅱ) $x=-1$일 때, $f(-1)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{2n}}{(-1)^{2n}+1}=\dfrac{1}{2}$

(ⅲ) $|x|<1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}=0$

(ⅳ) $|x|>1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (|x|>1) \\ \dfrac{1}{2} & (|x|=1) \\ 0 & (|x|<1) \end{cases}$$



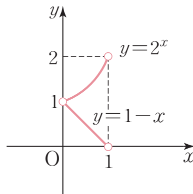
이고 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 x에서 연속이다.

4 ㄱ. $f(x)=3x^2+2x-3$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 1]$에서 연속함수이고
$f(0)=-3<0$, $f(1)=3\cdot1^2+2\cdot1-3=2>0$
이므로 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(c)=0$을 만족하는 c가 0과 1 사이에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $3x^2+2x-3=0$은 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

ㄴ. $f(x)=x^3+x-8$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고
$f(1)=-6<0,\ f(2)=2>0$
이므로 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(c)=0$을 만족하는 c가 1과 2 사이에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^3+x-8=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

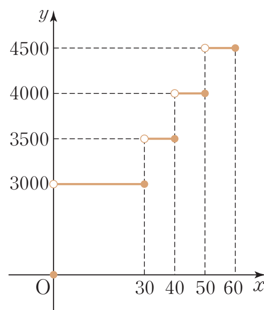
ㄷ. $f(x)=\cos x-x$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속이고, $f(0)=1>0$,
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$이므로 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(c)=0$을 만족하는 c가 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $\cos x-x=0$은 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

ㄹ. $f(x)=2^x+x-1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 1]$에서 연속이고
$f(0)=0, f(1)=2>0$
이다. 한편 $y=2^x$, $y=1-x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 구간 $(0,\ 1)$에서 만나지 않는다. 따라서 방정식 $2^x+x-1=0$은 0과 1 사이에서 실근을 갖지 않는다.



그러므로 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5 (1) $x=0$일 때, $f(x)=0$
$0<x\le 30$일 때, $f(x)=3000$
$30<x\le 40$일 때, $f(x)=3500$
$40<x\le 50$일 때, $f(x)=4000$
$50<x\le 60$일 때, $f(x)=4500$
$0\le x\le 60$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

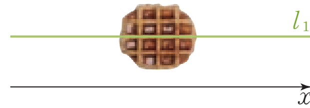


(2) 함수 $f(x)$는 $x=0,\ x=30,\ x=40,\ x=50$에서 불연속이고, 구간 $(0, 30)$, $(30, 40)$, $(40, 50)$, $(50, 60]$에서 연속이다.

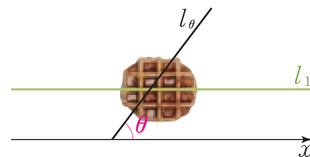
개념 넓히기 / P. 26

확인학습

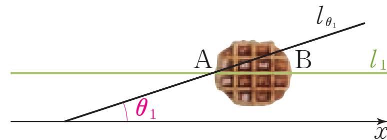
1 다음 그림과 같이 좌표평면에 넓이가 S인 와플이 놓여 있다고 하자. 그러면 x축과 평행한 직선 중에서 이 와플의 넓이를 정확하게 이등분하는 직선 l_1이 존재한다.

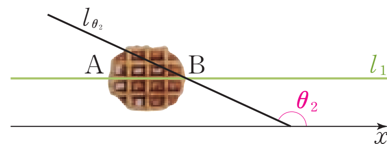


이제 직선 l_1의 위쪽 와플의 넓이를 이등분하면서 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선을 l_θ라 하고, 직선 l_1과 x축의 사이에 있으면서 직선 l_θ의 왼쪽에 있는 와플의 넓이를 $f(\theta)$라고 하자.



이때, l_1이 와플과 만나는 양 끝 점을 각각 A, B라고 하면 점 A를 지나고 직선 l_1의 위쪽 와플을 이등분하는 직선과 점 B를 지나고 직선 l_1의 위쪽 와플의 넓이를 이등분하는 직선이 각각 존재한다.
점 A를 지나면서 직선 l_1의 위쪽 와플의 넓이를 이등분하는 직선을 l_{θ_1}, 점 B를 지나면서 l_1의 위쪽 와플의 넓이를 이등분하는 직선을 $l_{\theta_2}(\theta_1<\theta_2)$라고 하면, 다음 그림에서 $f(\theta_1)=0, f(\theta_2)=\frac{S}{2}$임을 알 수 있다.





그런데 $f(\theta)$는 연속함수이므로 $f(\theta_3)=\frac{S}{4}$를 만족하는 θ_3이 θ_1과 θ_2 사이에 반드시 존재한다. 즉, 와플의 넓이를 사등분하고 서로 만나는 두 직선이 존재한다.

실력 키우기 / P. 27

1 (1) $f(g(0))=f(\sin 0)=f(0)=[0]=0$

$x \to +0$일 때 $\sin x \to +0$이고, $x \to -0$일 때 $\sin x \to -0$이므로 $\sin x=t$로 놓으면

$\lim_{x\to+0} f(g(x))=\lim_{t\to+0} f(t)=\lim_{t\to+0}[t]=0$

$\lim_{x\to-0} f(g(x))=\lim_{t\to-0} f(t)=\lim_{t\to-0}[t]=-1$

$\lim_{x\to+0} f(g(x)) \neq \lim_{x\to-0} f(g(x))$이므로

$\lim_{x\to 0} f(g(x))$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

(2) $g(f(\pi))=g([\pi])=g(3)=\sin 3$

$\lim_{x\to\pi+0} g(f(x))=\lim_{x\to\pi+0} g([x])=\lim_{x\to\pi+0}\sin[x]$
$=\sin 3$

$\lim_{x\to\pi-0} g(f(x))=\lim_{x\to\pi-0} g([x])=\lim_{x\to\pi-0}\sin[x]$
$=\sin 3$

$\therefore \lim_{x\to\pi} g(f(x))=\sin 3$

$g(f(\pi))=\lim_{x\to\pi} g(f(x))$이므로 함수 $y=g(f(x))$는 $x=\pi$에서 연속이다.

2 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$

$1^2-1+b=a+1 \qquad \therefore a-b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=2$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$

$2^2-2+b=2a+1 \qquad \therefore 2a-b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2, b=3$

3 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}$에서

$1\le 1+\sin^2 x\le 2$

$\therefore \frac{1}{2}\le\frac{1}{1+\sin^2 x}\le 1$

(i) $x\neq n\pi$ (n은 정수)일 때

$\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+\sin^2 x}<1$이므로

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}=\frac{\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}}{1-\frac{1}{1+\sin^2 x}}$$

$$=\frac{\sin x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin x}$$

(ii) $x=n\pi$ (n은 정수)일 때

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0}{(1+0)^n}=0$$

(i), (ii)에 의하여

$f(n\pi)=0$, $\lim_{x\to n\pi} f(x)=\lim_{x\to n\pi}\frac{1}{\sin x}=\pm\infty$이므로

$\lim_{x\to n\pi} f(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$, $x=2\pi$, $x=3\pi$에서 불연속이다.

4 (1) $f(x)=x-\frac{1}{x+1}$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 2]$에서 연속이고

$f(0)=-1<0$, $f(2)=\frac{5}{3}>0$

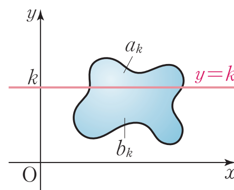
이므로 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(c)=0$을 만족하는 c가 0과 2 사이에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x-\frac{1}{x+1}=0$은 구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

(2) $f(x)=x\cos x-\sin x$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$에서 연속이고

$f(\pi)=-\pi<0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1>0$

이므로 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(c)=0$을 만족하는 c가 π와 $\frac{3}{2}\pi$ 사이에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x\cos x-\sin x=0$은 구간 $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

5 주어진 도형에서 직선 $y=k$의 위쪽 부분의 넓이를 a_k라 하고, 아래쪽 부분의 넓이를 b_k라고 하자.



또 주어진 도형의 넓이를 S라고 하면 $a_k=0$인 k의 값이 존재하고 $a_k=S$인 k의 값이 존재한다. 이때, a_k는 연속함수이므로 $a_k=\frac{S}{2}$를 만족하는 k의 값이 반드시 존재한다.

따라서 넓이를 이등분하는 x축에 평행한 직선이 존재한다. 같은 방법으로 $a_k=\frac{S}{3}$, $a_{k'}=\frac{2S}{3}$를 만족하는 k, k'의 값이 각각 반드시 존재한다.

따라서 넓이를 삼등분하는 x축에 평행한 두 직선이 존재한다.

대단원 확인하기 P. 28, 29

1 (1) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2}{x+1}=-\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to-1}\frac{2}{(x+1)^2}=\infty$

따라서 $\lim_{x\to-1}\frac{2}{(x+1)^2}$는 존재하지 않는다.

(3) $\lim_{x\to9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$
$=\lim_{x\to9}(\sqrt{x}+3)=6$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$
$=\frac{\infty}{1}=\infty$

따라서 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^2-x-2}$은 존재하지 않는다.

2 (1) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{a^2}{a+1}\right)$
$=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\cdot\frac{x^2(a+1)-a^2(x+1)}{(x+1)(a+1)}$
$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(ax+x+a)}{(x-a)(x+1)(a+1)}$
$=\lim_{x\to a}\frac{ax+x+a}{(x+1)(a+1)}=\frac{a^2+2a}{(a+1)^2}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x+1}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{(x+2)-(3x-2)\}(\sqrt{5x-1}+\sqrt{4x+1})}{\{(5x-1)-(4x+1)\}(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})}$
$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{-2x+4}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\right\}$

이때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=-2$

이고,

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{3-\frac{2}{x}}}$
$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{4}}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{3}}$

이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=(-2)\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{3}}$
$=(\sqrt{5}+2)(1-\sqrt{3})$

(3) $\lim_{x\to3+0}\frac{|x^2-9|}{x-3}=\lim_{x\to3+0}\frac{x^2-9}{x-3}$
$=\lim_{x\to3+0}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$
$=\lim_{x\to3+0}(x+3)=6$

(4) $\lim_{x\to1+0}\frac{x-[x]}{x^3-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$
$=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}$

3 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2}$에서 $x\to-1$일 때

(분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

$\lim_{x\to-1}(ax^2+bx+c)=a-b+c=0$ ······ ㉠

$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$에서

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$
$=a=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $c=b-2$

$\lim_{x\to-1}f(x)=-1$에서

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+bx+b-2}{(x+1)(x-2)}$
$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x-2+b)}{(x+1)(x-2)}$
$=\lim_{x\to-1}\frac{2x-2+b}{x-2}$
$=\frac{-4+b}{-3}=-1$

$\therefore b=7$ $\therefore a=2,\ b=7,\ c=5$

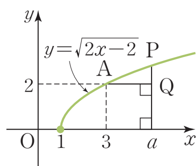
4 $x+1\le f(x)\le x+2$에서 $x\to\infty$이면 $x>0$이므로

$\frac{x+1}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{x+2}{x}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}\le\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\le\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}$

$1\le\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\le1$ $\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

5 점 P의 x좌표를 $a\,(a>1)$로 놓으면



$\overline{AQ}=|a-3|$

$\overline{PQ}=|\sqrt{2a-2}-2|$

$$\therefore \lim_{a\to3}\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}$$

$$=\lim_{a\to3}\left|\frac{\sqrt{2a-2}-2}{a-3}\right|$$

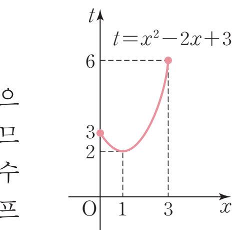
$$=\lim_{a\to3}\left|\frac{(2a-2)-4}{(a-3)(\sqrt{2a-2}+2)}\right|$$

$$=\lim_{a\to3}\left|\frac{2}{\sqrt{2a-2}+2}\right|$$

$$=\left|\frac{2}{\sqrt{4}+2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}$$

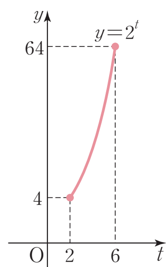
6 (1) $y=f(x)$로 놓고 $y=2^{x^2-2x+3}$에서 $t=x^2-2x+3$으로 놓으면 $t=(x-1)^2+2$이므로 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $t=x^2-2x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 t는 $x=3$일 때 최댓값 6, $x=1$일 때 최솟값 2를 가진다.

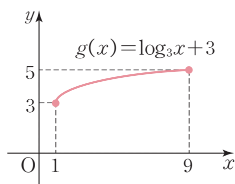
$\therefore\ 2\le t\le 6$

$y=2^{x^2-2x+3}=2^t$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=6$일 때 최댓값 64, $t=2$일 때 최솟값 4를 가진다.



따라서 $t=6$일 때 $x=3$이고 $t=2$일 때 $x=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 64, $x=1$일 때 최솟값 4를 가진다.

(2) $g(x)=\log_3 x+3$이므로 구간 $[1,\ 9]$에서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $g(x)$는 $x=9$일 때 최댓값 5, $x=1$일 때 최솟값 3을 가진다.

7 (1) $f(x)=[x]^2+(x+1)[x]$에서

$f(0)=0+(0+1)\cdot0=0$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\{[x]^2+(x+1)[x]\}=0$$

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\{[x]^2+(x+1)[x]\}$$

$$=(-1)^2+(0+1)\cdot(-1)=0$$

$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) $f(x)=[x]^2+(2x-1)[x]$에서

$f(0)=0+(2\cdot0-1)\cdot0=0$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\{[x]^2+(2x-1)[x]\}$$

$$=0+(2\cdot0-1)\cdot0=0$$

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\{[x]^2+(2x-1)[x]\}$$

$$=(-1)^2+(2\cdot0-1)\cdot(-1)$$

$$=2$$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

8 $f(a)=k\ (k\neq0)$로 놓고 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 $f(k)$가 존재하지 않고 불연속이라고 하자.

ㄱ. $y=\{f(x)\}^2$에서

$\{f(a)\}^2=k^2$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}f(x)=k^2$$

$\therefore \{f(a)\}^2=\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2$

따라서 함수 $y=\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $y=\dfrac{1}{f(x)}$에서

$$\frac{1}{f(a)}=\frac{1}{k}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f(a)}=\frac{1}{k}$$

$$\therefore \frac{1}{f(a)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}$$

따라서 함수 $y=\dfrac{1}{f(x)}$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. $y=10^{f(x)}$에서

$10^{f(a)}=10^k$

$$\lim_{x\to a}10^{f(x)}=10^{f(a)}=10^k$$

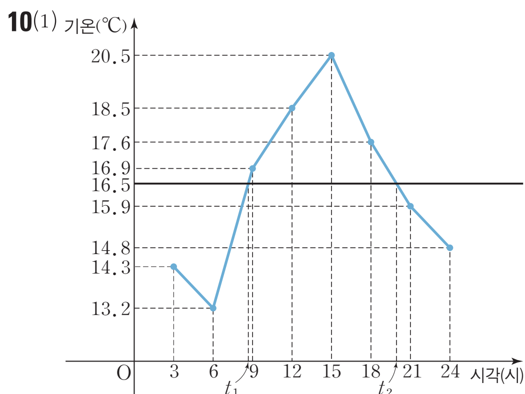
$\therefore\ 10^{f(a)}=\lim_{x\to a}10^{f(x)}$

따라서 함수 $y=10^{f(x)}$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄹ. $y=f(f(x))$에서 $\quad f(f(a))=f(k)$
$f(k)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(f(x))$는 $x=a$에서 불연속이다.
따라서 함수 $y=f(f(x))$는 $x=a$에서 항상 연속인 것은 아니다.
그러므로 $x=a$에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

9 $f(x)=\log_{10}x-3+x$로 놓으면 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 연속이다.
$f(3)=\log_{10}3-3+3=\log_{10}3>0$
$f(2)=\log_{10}2-3+2=-1+\log_{10}2<0$
중간값의 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족하는 c가 2와 3 사이에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $\log_{10}x-3+x=0$은 구간 $(2, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다. $\quad \therefore n=2$

10 (1)



(2) 시각을 t로 놓고 기온을 $f(t)$로 놓으면 함수 $f(t)$는 구간 $[3, 24]$에서 연속이다.
시각 $t=6$(시)에서의 기온 13.2 ℃와 시각 $t=9$(시)에서의 기온 16.9 ℃ 사이에 평균 기온 16.5 ℃의 값이 존재하므로 중간값의 정리에 의하여 $f(t_1)=16.5$ (℃)를 만족하는 t_1이 6시와 9시 사이에 적어도 하나 존재한다.
같은 방법으로 18시와 21시 사이에도 기온이 평균 기온과 일치하는 시각 t_2가 적어도 하나 존재한다.
따라서 기온이 평균 기온과 일치하는 시각이 적어도 두 번 존재한다.

프로젝트 / P. 31

$$\lim_{V\to+0}t=\lim_{V\to+0}\frac{V-22.4334}{0.08213}$$
$$=-273.145\cdots\fallingdotseq-273.15$$

Ⅱ. 다항함수의 미분법

1. 미분계수와 도함수

미분계수와 도함수에 들어가기 전에 / P. 35

1 (1) $\dfrac{-2-2}{-3-0}=\dfrac{-4}{-3}=\dfrac{4}{3}$

(2) $\dfrac{-3-3}{2-(-1)}=\dfrac{-6}{3}=-2$

2 $\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}(-x+3)=2$
$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}k=k$
$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)$이어야 하므로 $\quad k=2$

3 (1) $\lim_{t\to2}(t^2+3t)=10$

(2) $\lim_{t\to1}\dfrac{3t+5}{t-2}=\dfrac{8}{-1}=-8$

(3) $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}$
$=\lim_{x\to2}(x+1)$
$=3$

(4) $\lim_{h\to0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{h^2+2h+1-1}{h}$
$=\lim_{h\to0}\dfrac{h(h+2)}{h}$
$=\lim_{h\to0}(h+2)$
$=2$

4 (1) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$라고 하면 함수 $f(x)$는 $f(1)$, $f(-1)$이 존재하지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=1$, $x=-1$에서 불연속이다.

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{|x+2|} & (x\neq-2)\\ 0 & (x=-2)\end{cases}$ 이라고 하면

$f(x)=\begin{cases}1 & (x>-2)\\ 0 & (x=-2)\\ -1 & (x<-2)\end{cases}$

$\lim_{x\to-2+0}f(x)=1$, $\lim_{x\to-2-0}f(x)=-1$이므로
$\lim_{x\to-2}f(x)$가 존재하지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

1. 미분계수

바탕 다지기 / P. 37

| 스스로 하기 |

1 $-\Delta x$, -1

2 기울기, $-2\Delta x-(\Delta x)^2$, $-2-\Delta x$, -2

1 (1) $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{(3\cdot2+1)-(3\cdot0+1)}{2}$

$=\dfrac{6}{2}=3$

(2) $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{(2-3)^2-(0-3)^2}{2}$

$=\dfrac{(-8)}{2}=-4$

2 (1) $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\{-2(2+\Delta x)+5\}-(-2\cdot2+5)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2$

(2) $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\{(2+\Delta x)+3\}^2-(2+3)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(\Delta x)^2+10\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(\Delta x+10)=10$

기본 익히기 / P. 38

1 (1) $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$=\dfrac{\{-2(a+\Delta x)+3\}-(-2a+3)}{\Delta x}$

$=\dfrac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2$

(2) $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$=\dfrac{\{(a+\Delta x)^3+1\}-(a^3+1)}{\Delta x}$

$=\dfrac{3a^2\Delta x+3a(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2$

2 (1) $f'(10)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(10+\Delta x)-f(10)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-2-(-2)}{\Delta x}=0$

(2) $f'(-10)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(-10+\Delta x)-f(-10)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\left\{-\frac{1}{3}(-10+\Delta x)+\frac{2}{3}\right\}-\left\{-\left\{\frac{1}{3}(-10)+\frac{2}{3}\right\}\right.}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}\Delta x}{\Delta x}$

$=\dfrac{1}{3}$

(3) $f'(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\{(-1+\Delta x)^2+100\}-\{(-1)^2+100\}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(-2+\Delta x)$

$=-2$

(4) $f'(3)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\{-(3+\Delta x)^3-1\}-(-3^3-1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-27\Delta x-9(\Delta x)^2-(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\{-27-9\Delta x-(\Delta x)^2\}$

$=-27$

3 $f(x)=x^2+x+3$이라고 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$이므로

(1) $f'(-2)$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{1}{\Delta x}[\{(-2+\Delta x)^2+(-2+\Delta x)+3\}$

$-\{(-2)^2+(-2)+3\}]$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(\Delta x-3)$

$=-3$

(2) $f'(-1)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[\{(-1+\Delta x)^2+(-1+\Delta x)+3\}-\{(-1)^2+(-1)+3\}]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2-\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x-1)=-1$$

(3) $f'(1)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[\{(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)+3\}-(1^2+1+3)]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+3)=3$$

(4) $f'(0)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[\{(0+\Delta x)^2+(0+\Delta x)+3\}-(0^2+0+3)]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+1)=1$$

4 함수 $f(x)$가 모든 점에서 미분가능하므로, $x=1$에서도 미분가능하고 연속이다.
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(ax+b)=a+b$$

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}x^2=1$$

$\therefore a+b=1$ ······ ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\{a(1+\Delta x)+b\}-(a+b)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{a\Delta x}{\Delta x}$$

$=a$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}(2+\Delta x)$$

$=2$

$\therefore a=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a=2,\ b=-1$

5 두 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$, $\mathrm{Q}(a,\ 2a^2-1)$을 지나는 직선의 기울기가 $g(a)$이므로

$$g(a)=\frac{(2a^2-1)-1}{a-1}$$

$$=\frac{2(a^2-1)}{a-1}$$

$$=\frac{2(a+1)(a-1)}{a-1}$$

$=2(a+1)$

$$\therefore \lim_{a\to 1}g(a)=\lim_{a\to 1}2(a+1)$$

$=4$

실력 키우기 / P. 39

1 $$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{f(x^2)-f(2)}{x-\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{\{f(x^2)-f(2)\}(x+\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{2}}\left\{\frac{f(x^2)-f(2)}{x^2-2}\cdot(x+\sqrt{2})\right\}$$

$x^2-2=h$라고 하면 $x^2=2+h$

$x\longrightarrow\sqrt{2}$이면 $h\longrightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{f(x^2)-f(2)}{x-\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{2}}\left\{\frac{f(x^2)-f(2)}{x^2-2}\cdot(x+\sqrt{2})\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\cdot\lim_{x\to\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})$$

$=f'(2)\cdot 2\sqrt{2}$

$=1\cdot 2\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

2 삼차함수 $f(x)=x^3+x^2+x+1$의 그래프 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)=2$이다.

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}[\{(a+\Delta x)^3+(a+\Delta x)^2+(a+\Delta x)+1\}-(a^3+a^2+a+1)]$$
$$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\{(\Delta x)^3+(3a+1)(\Delta x)^2+(3a^2+2a+1)\Delta x\}$$
$$=\lim_{\Delta x \to 0}\{(\Delta x)^2+(3a+1)\Delta x+(3a^2+2a+1)\}$$
$$=3a^2+2a+1=2$$

$3a^2+2a-1=0,\quad (a+1)(3a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{3}\ (\because a>0)$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+1=\frac{40}{27}=b$

$\therefore b=\frac{40}{27}$

3 함수 $f(x)=x^3$에서 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{a^3-1^3}{a-1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a-1}$$
$$=a^2+a+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)=x^3$ 위의 점 $(a,\ a^3)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a+\Delta x)^3-a^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3a^2\Delta x+3a(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to 0}\{3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2\}=3a^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

주어진 조건에서 ㉠과 ㉡이 같으므로

$a^2+a+1=3a^2,\quad 2a^2-a-1=0$

$(2a+1)(a-1)=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}\ (\because a\neq 1)$

4 $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & (-1\leq x\leq 1) \\ x^2-1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \end{cases}$

(i) $\lim_{x\to 1} f(x)=0=f(1),\quad \lim_{x\to -1} f(x)=0=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1,\ x=-1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\{(1+\Delta x)^2-1\}-(-1^2+1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to +0} \frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to +0}(2+\Delta x)=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\{-(1+\Delta x)^2+1\}-(-1^2+1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to -0} \frac{-2\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to -0}(-2-\Delta x)=-2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $f'(1)$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(iii) $\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\{-(-1+\Delta x)^2+1\}-\{-(-1)^2+1\}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to +0} \frac{2\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to +0}(2-\Delta x)=2 \quad \cdots\cdots ㉢$$

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\{(-1+\Delta x)^2-1\}-\{-(-1)^2+1\}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to -0} \frac{-2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x \to -0}(-2+\Delta x)=-2 \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣에서 $f'(-1)$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=1,\ x=-1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

5 물체가 자유 낙하하기 시작하여 a초 동안 낙하한 거리는 $4.9a^2$ m이고, b초 동안 낙하한 거리는 $4.9b^2$ m이다. 따라서 a초에서 b초까지의 평균속도는

$$\frac{4.9b^2-4.9a^2}{b-a}=\frac{4.9(b-a)(b+a)}{b-a}$$
$$=4.9(b+a)\text{(m/s)}$$

6 제품의 생산량이 100개일 때의 ΔC는

$$\Delta C = C(100+\Delta x) - C(100)$$
$$= \{10000+50(100+\Delta x)+0.1(100+\Delta x)^2\} - (10000+50\cdot 100+0.1\cdot 100^2)$$
$$= 70\Delta x + 0.1(\Delta x)^2$$

따라서 제품의 생산량이 100개일 때의 한계 비용은

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{70\Delta x + 0.1(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(70+0.1\Delta x) = 70(\text{원})$$

프로젝트 / P. 40, 41

1단계 P 지점의 높이가 100 m이므로 A(400, 400), B(1000, 500), P(0, 0), Q(1800, 0)

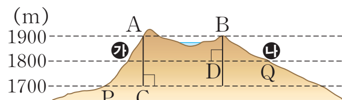
2단계 (경사면 PA의 평균 경사도)$=\dfrac{400-0}{400-0}=1$

(경사면 QB의 평균 경사도)$=\dfrac{500-0}{1800-1000}=\dfrac{5}{8}$

3단계 (경사면 PA의 평균 경사도)>(경사면 QB의 평균 경사도)이므로 P 지점에서 A 지점으로 오를 때 높이의 변화 정도가 심하다.

4단계 P 지점에서 B 지점으로 가는 등산로를 택한다. 왜냐하면 평균 경사도가 작은 쪽이 경사가 완만하여 등산하기 편하기 때문이다.

논술/수행평가 과제



위의 그림에서 $\overline{PC}=0.5$ cm, $\overline{QD}=0.6$ cm이고 평면도에서 1 cm는 실제로 500 m이므로, 경사면 ㉮의 평균 경사도는

$$\frac{1900-1700}{0.5\times 500}=\frac{200}{250}=0.8$$

경사면 ㉯의 평균 경사도는

$$\frac{1900-1800}{0.6\times 500}=\frac{100}{300}\fallingdotseq 0.33$$

따라서 경사면 ㉮가 경사면 ㉯보다 경사의 정도가 심하다.

2. 도함수의 정의와 미분법

바탕 다지기 / P. 43

| 스스로 하기 |

1 $2x+\Delta x$, $2x$

2 (1) $4x^3$ (2) $2x^3$, $5x^4$, x^3, $5x^4+6x^2$

1 ㄱ. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)$

ㄷ. $t-x=h$로 놓으면 $t=x+h$

$t\to x$일 때, $h\to 0$이므로

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

ㄹ. $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(\Delta x)}{\Delta x}\neq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

따라서 서로 같은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2 (1) $f(x)=x^2+2x-3$이므로

$$f'(x)=(x^2+2x-3)'=(x^2)'+2(x)'-(3)'=2x+2$$

(2) $f(x)=x^8-x^4+x^2-1$이므로

$$f'(x)=(x^8-x^4+x^2-1)'=(x^8)'-(x^4)'+(x^2)'-(1)'=8x^7-4x^3+2x$$

기본 익히기 / P. 44

1 (1) $f'(x)=20x^{19}+10x^9-5x^4$

(2) $f(x)=x^3+6x^2+11x+6$이므로

$f'(x)=3x^2+12x+11$

(3) $f(x)=4x^2+4x+1$이므로

$f'(x)=8x+4$

(4) $f(x)=x^5-1$이므로 $f'(x)=5x^4$

2 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2+2ax+3\geq 0$이므로 이차방정식 $3x^2+2ax+3=0$의 판별식을 D라고 하면 $\dfrac{D}{4}=a^2-3^2\leq 0$

$(a+3)(a-3)\leq 0$ $\therefore -3\leq a\leq 3$

3 $f'(x)=3x^2+a$이므로

$3f(x)=x\{f'(x)+2\}$에서

$3(x^3+ax+b)=x\{(3x^2+a)+2\}$

$3x^3+3ax+3b=3x^3+(a+2)x$

$(2a-2)x+3b=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$2a-2=0,\ \ 3b=0$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

4 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot 2$

$2h=t$로 놓으면 $h\to 0$일 때, $t\to 0$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\cdot 2$

$=2f'(x)=2(5x^4+5)$

$=10x^4+10$

5 $y'=-\frac{1}{20}x'\{(x-8)(x-24)\}$

$-\frac{1}{20}x\{(x-8)(x-24)\}'$

$=-\frac{1}{20}(x-8)(x-24)$

$-\frac{1}{20}x\{(x-8)'(x-24)+(x-8)(x-24)'\}$

$=-\frac{1}{20}(x^2-32x+192)-\frac{1}{20}x(x-24+x-8)$

$=-\frac{1}{20}(x^2-32x+192+2x^2-32x)$

$=-\frac{1}{20}(3x^2-64x+192)$

따라서 오전 6시의 전력 사용량의 순간변화율은

$-\frac{1}{20}(3\cdot 6^2-64\cdot 6+192)=4.2$

실력 키우기 / P. 45

1 $f'(x)=(x-1)'(x-2)(x-3)(x-4)$

$+(x-1)(x-2)'(x-3)(x-4)$

$+(x-1)(x-2)(x-3)'(x-4)$

$+(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)'$

$=(x-2)(x-3)(x-4)$

$+(x-1)(x-3)(x-4)$

$+(x-1)(x-2)(x-4)$

$+(x-1)(x-2)(x-3)$

에서 $f'(1)=(1-2)(1-3)(1-4)=-6$

$f'(2)=(2-1)(2-3)(2-4)=2$

$\therefore\ \frac{f'(2)}{f'(1)}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$

2 $\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(x+\frac{3}{n}\right)-f\left(x-\frac{4}{n}\right)\right\}$에서

$n=\frac{1}{h}$이라고 하면 $n\to\infty$일 때, $h\to 0$,

$3h\to 0,\ \ -4h\to 0$이므로

$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(x+\frac{3}{n}\right)-f\left(x-\frac{4}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{f\left(x+3h\right)-f\left(x-4h\right)\right\}$

$=\lim_{3h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\cdot 3$

$-\lim_{-4h\to 0}\frac{f(x-4h)-f(x)}{-4h}\cdot(-4)$

$=3f'(x)-(-4)f'(x)=7f'(x)$

$=7(5x^4-4x^3+3x^2)$

$=35x^4-28x^3+21x^2$

3 $f(x)$가 n차의 다항함수이면 $f'(x)$는 $n-1$차의 다항함수이므로

$f'(x)\{f'(x)+3\}=3f(x)+x^2+5x-5$

의 좌변은 $2(n-1)$차식이고 우변은 n차식이다.

$2n-2=n\qquad\therefore\ n=2$

$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$이므로

$(2ax+b)\{(2ax+b)+3\}$

$=3(ax^2+bx+c)+x^2+5x-5$

$4a^2x^2+(4ab+6a)x+b^2+3b$

$=(3a+1)x^2+(3b+5)x+(3c-5)$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$4a^2=3a+1$ …… ㉠

$4ab+6a=3b+5$ …… ㉡

$b^2+3b=3c-5$ …… ㉢

㉠에서 $4a^2-3a-1=0$

$(4a+1)(a-1)=0$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $4b+6=3b+5$

$\therefore\ b=-1$ …… ㉤

㉢, ㉤에서 $1-3=3c-5$

$\therefore\ c=1$ …… ㉥

㉣, ㉤, ㉥에 의하여 $f(x)=x^2-x+1$

4 삼차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$는 2로 수렴하므로 $f(1)=0$이다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$\therefore f'(1)=2$

또 $x=2$에서 $f(x)$는 연속이고

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$는 -1로 수렴하므로 $f(2)=0$이다.

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$\therefore f'(2)=-1$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(1)=a+b+c+d=0$

$f(2)=8a+4b+2c+d=0$

$f'(1)=3a+2b+c=2$

$f'(2)=12a+4b+c=-1$

위의 식을 연립하면 $a=1, b=-6, c=11, d=-6$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

5 (i) $n=1$일 때, $\{f(x)\}'=f'(x)$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$[\{f(x)\}^k]'=k\{f(x)\}^{k-1}f'(x)$

$[\{f(x)\}^{k+1}]'=[\{f(x)\}^k f(x)]'$

$=[\{f(x)\}^k]'f(x)+\{f(x)\}^k f'(x)$

$=[k\{f(x)\}^{k-1}f'(x)]f(x)+\{f(x)\}^k f'(x)$

$=k\{f(x)\}^k f'(x)+\{f(x)\}^k f'(x)$

$=(k+1)\{f(x)\}^k f'(x)$

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$[\{f(x)\}^n]'=n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$

가 성립한다.

2. 도함수의 활용

도함수의 활용에 들어가기 전에 / P. 47

1 (1) $y-(-2)=3(x-1)$

$\therefore y=3x-5$

(2) $y-(-2)=\frac{3-(-2)}{-2-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-5x-7$

2 (1) $f(x)=x^2-2x+1$이라고 하면

$f(x)=(x-1)^2$이므로

$f(0)=1, f(1)=0, f(3)=4$에서

최댓값: 4, 최솟값: 0

(2) $f(x)=-x^2-2x-3$이라고 하면

$f(x)=-(x+1)^2-2$이므로

$f(0)=-3, f(1)=-6$에서

최댓값: -3, 최솟값: -6

3 (1) 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-4\cdot 2<0$

$\therefore -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

(2) 이차방정식 $2x^2-x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot a=1-8a\le 0$

$\therefore a\ge\frac{1}{8}$

4 (1) $f'(x)=2x-4$

(2) $f'(x)=x^3+x+1+(x+1)(3x^2+1)$

$=x^3+x+1+3x^3+3x^2+x+1$

$=4x^3+3x^2+2x+2$

(3) $f'(x)=6x^5+5x^4-21x^2+6$

1. 그래프에의 활용

바탕 다지기 / P. 49

| 스스로 하기 |

1 (1) $3x^2+1$, 13, 13, $y=13x-16$

(2) $-2x+2$, -2, -2, 2, -1, -1, -2, 2, $y=-2x+3$

1 (1) $f'(x)=-6x^2+6$

(2) $-6x^2+6=0$

$-6(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

(3)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1 극솟값	↗	9 극댓값	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극댓값 9, $x=-1$일 때 극솟값 1을 가진다.

기본 익히기 / P. 51

1 $y'=x^2$이므로 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$y-4=4(x-2)$ $\quad\therefore y=4x-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$y'=2x+a$이므로 $y=x^2+ax+b$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=(2+a)(x-1)$

$\therefore y=(2+a)x-(2+a)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 같은 접선이므로 $\quad a=2$

한편 점 $(1,\ 0)$은 곡선 $y=x^2+ax+b$ 위의 점이므로 $0=1+a+b$ $\quad\therefore b=-3$

$\therefore a=2,\ b=-3$

2 주어진 함수가 일대일 대응이 되려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-2ax+a$가 항상 0보다 크거나 같아야 하므로, 이차방정식 $3x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\leq 0$ $\qquad\therefore 0\leq a\leq 3$

3 (1) $f'(x)=-3x^2+6x$

(2) $-3x^2+6x=0,\quad -3x(x-2)=0$

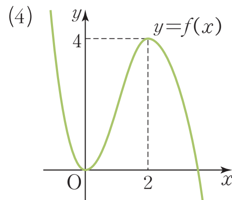
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

(3)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0 극솟값	↗	4 극댓값	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 4, $x=0$에서 극솟값 0을 가진다.

(4)



4 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

$f'(-2)=24-4a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(-1)=6-2a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡으로부터 $\quad a=9,\ b=12$

$f(-1)=-2+9-12+c=0$이므로 $\quad c=5$

$\therefore a=9,\ b=12,\ c=5$

5 $\frac{d}{dx}C(x)=\frac{2}{5}x-8$

$C'(x)=0$에서 $\quad \frac{2}{5}x-8=0$ $\quad\therefore x=20$

x	0	$\cdots$	20	$\cdots$
$C'(x)$		$-$	0	$+$
$C(x)$		↘	2000 극솟값	↗

따라서 비용이 2000원으로 최소일 때, 밧줄의 길이는 20 m이다.

개념 넓히기 / P. 52

확인학습

1 (1) $f(x)=x^3-x^2$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

$f(-1)=-2,\ f(0)=0,\ f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{27},\ f(2)=4$

$\therefore$ 최댓값: 4, 최솟값: -2

(2) $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

$f(-1)=-15,\ f(1)=5,\ f(3)=1$

$\therefore$ 최댓값: 5, 최솟값: -15

실력 키우기 / P. 53

1 $f'(x)=6x^2-6x+6k=6(x^2-x+k)$

이차방정식 $x^2-x+k=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라고 하면 $\quad \alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=k$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1-4k$

$\therefore \alpha-\beta=-\sqrt{1-4k}$

함수 $f(x)$의 최고차항이 양수이므로 극댓값은

$f(\alpha)=2\alpha^3-3\alpha^2+6k\alpha$

극솟값은 $f(\beta)=2\beta^3-3\beta^2+6k\beta$

$f(\alpha)-f(\beta)$

$=(2\alpha^3-3\alpha^2+6k\alpha)-(2\beta^3-3\beta^2+6k\beta)$

$=2(\alpha^3-\beta^3)-3(\alpha^2-\beta^2)+6k(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)\{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3(\alpha+\beta)+6k\}$

$=(\alpha-\beta)[2\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-3(\alpha+\beta)+6k]$

$=-\sqrt{1-4k}\,\{2(1-k)-3\cdot 1+6k\}$

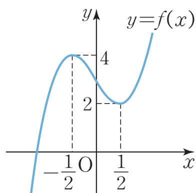
$=-\sqrt{1-4k}\,(4k-1)$

한편 $f(\alpha)-f(\beta)=27$이므로

$27=\sqrt{(1-4k)^3},\quad 9=1-4k$ $\quad\therefore k=-2$

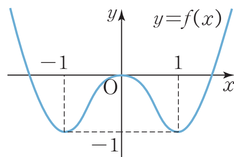
2 (1) $y'=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	4 극댓값	↘	2 극솟값	↗



(2) $y'=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	-1 극솟값	↗	0 극댓값	↘	-1 극솟값	↗



3 $y'=3x^2$이므로 점 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$을 지나는 접선의 기울기는 $3a^2$이고 접선의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a)$

$y=3a^2x-3a^3+a^3$, $y=3a^2x-2a^3$

이 접선과 곡선 $y=x^3$의 교점은 다음 방정식으로부터 구할 수 있다.

$x^3=3a^2x-2a^3$, $x^3-3a^2x+2a^3=0$

$(x-a)^2(x+2a)=0$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-2a,\ -8a^3)$이고 점 Q를 지나는 접선의 기울기는 $3(-2a)^2=12a^2$

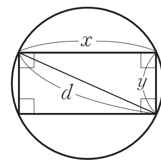
$12a^2=4\cdot 3a^2$이므로 점 Q에서의 접선의 기울기는 점 P에서의 접선의 기울기의 4배이다.

4 $y'=3x^2-24x+21=3(x-1)(x-7)$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	7	$\cdots$	10
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	105	↗	115 극댓값	↘	7 극솟값	↗	115

따라서 방문한 사람의 수는 $x=1$ 또는 $x=10$일 때 가장 많았고, $x=7$일 때 가장 적었다.

5 오른쪽 그림과 같이 통나무를 자른 원의 단면에 내접하는 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 x, y라고 하면 강도 p는



$p=kx\cdot y^2$ (k: 비례상수, $k>0$) $\cdots\cdots$ ㉠

와 같다. 한편 원의 지름의 길이를 d라고 하면 $x^2+y^2=d^2$이므로 ㉠을 다음과 같이 변형할 수 있다.

$p=kx(d^2-x^2)=kd^2x-kx^3\ (0<x<d)$

$\frac{dp}{dx}=kd^2-3kx^2=k(d+\sqrt{3}x)(d-\sqrt{3}x)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}d$	$\cdots$	d
$\frac{dp}{dx}$		$+$	0	$-$	
p		↗	극대	↘	

따라서 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}d$, $y=\frac{\sqrt{6}}{3}d$일 때, 강도는 최대가 된다. $\therefore$ (가로) : (세로) $=1:\sqrt{2}$

2. 방정식과 부등식에의 활용

바탕 다지기 / P. 57

| 스스로 하기 |

1 $x+1$, -1, -1, $-$, 2, 2, -1, $0<k<2$

1 (1) $f(x)=x^3-3x^2+5$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5 극댓값	↘	1 극솟값	↗

(극댓값) $\times$ (극솟값) $=5\times 1>0$이므로 방정식 $x^3-3x^2+5=0$은 하나의 실근을 가진다.

(2) $f(x)=x^4+2x^2-1$이라고 하면

$f'(x)=4x^3+4x=4x(x^2+1)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1 극솟값	↗

극솟값이 음수이므로 방정식 $x^4+2x^2-1=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

2 (1) $f(x)=x^4-4x+k$라고 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 극소이면서 최소이므로 주어진 부등식이 성립하려면

$f(1)=k-3>0 \quad \therefore k>3$

(2) $f(x)=x^4+x^3+x^2+k$라고 하면

$f'(x)=4x^3+3x^2+2x=x(4x^2+3x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때, 극소이면서 최소이므로 주어진 부등식이 성립하려면

$f(0)=k\geq 0 \quad \therefore k\geq 0$

기본 익히기 / P. 58

1 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+k$라고 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

따라서 극댓값은 $f(-2)=20+k$이고, 극솟값은 $f(1)=-7+k$이다.

삼차방정식 $f(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가져야 하므로 (극댓값)×(극솟값)=0이다.

즉, $(20+k)(-7+k)=0$

$\therefore k=-20$ 또는 $k=7$

2 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-k$라고 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-2)(x+1)$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 $7-k$, $x=2$일 때 극솟값 $-20-k$를 가진다.

방정식 $f(x)=0$의 근이 오직 한 개 존재해야 하므로 (극댓값)×(극솟값)>0이다.

즉, $\quad (7-k)(-20-k)>0$

$\therefore k<-20$ 또는 $k>7$

따라서 자연수 k의 최솟값은 8이다.

3 주어진 그림으로부터 $f(x)$는 $x=0$일 때 극소, $x=3$일 때 극대임을 알 수 있다.

$f(0)\cdot f(3)=1\cdot 3>0$이므로 방정식 $f(x)=0$의 실근은 오직 하나 존재한다.

4 $f(x)=3x^4-4x^3+1$이라고 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$일 때, 극솟값

$f(1)=3-4+1=0$을 가진다.

따라서 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $f(x)\geq 0$, 즉

$3x^4+1\geq 4x^3 \quad \therefore 4x^3\leq 3x^4+1$

5 $h(x)=f(x)-g(x)$

$=(x^3+x^2+x)-(4x^2+x+k)$

$=x^3-3x^2-k$

로 놓으면 $\quad h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=2$ ($\because 1\leq x\leq 3$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$-4-k$ 극솟값	$\nearrow$	

$1\leq x\leq 3$에서 함수 $h(x)$는 $x=2$일 때, 극소이면서 최소이므로 주어진 부등식이 항상 성립하려면

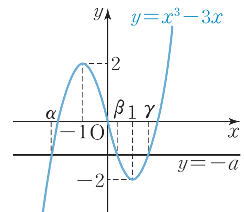
$h(2)=-4-k\geq 0 \quad \therefore k\leq -4$

실력 키우기 / P. 59

1 $f(x)=x^3-3x$라고 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

따라서 $f(x)$는 극댓값 $f(-1)=2$, 극솟값 $f(1)=-2$를 가진다.



방정식 $x^3-3x+a=0$의 근은 $y=f(x)$와 $y=-a$의 교점의 x좌표이다. $a>0$이므로 오른쪽 그림에서

$|\alpha|>|\gamma|>|\beta|$

2 $f'(a)=f(a)=0$이므로 $f(x)=(x-a)^2Q(x)$이고, $f'(b)=f(b)=0$이므로 $f(x)=(x-b)^2R(x)$이다.

즉, $f(x)=k(x-a)^2(x-b)^2$ (k는 상수)

따라서 함수 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

3 $y'=3x^2-2x=x(3x-2)$이므로

곡선 $y=x^3-x^2$ 위의 점 (a, a^3-a^2)에서 접하는 접선의 방정식은 $y-a^3+a^2=a(3a-2)(x-a)$

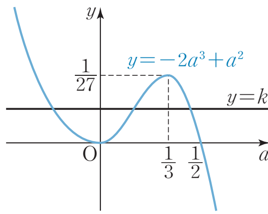
이 직선이 점 $(0, k)$를 지나므로

$k-a^3+a^2=-3a^3+2a^2$, $k=-2a^3+a^2$

$f(a)=-2a^3+a^2$이라고 하면

$f'(a)=-6a^2+2a=2a(-3a+1)$

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	$\searrow$	0 극솟값	$\nearrow$	$\frac{1}{27}$ 극댓값	$\searrow$



$\therefore 0<k<\frac{1}{27}$

4 $f(x)=x^4-2x^3+kx^2$에서

$f'(x)=4x^3-6x^2+2kx$

$\quad =x(4x^2-6x+2k)$

$f(x)$가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하고, 방정식 $f'(x)=0$의 한 근이 $x=0$이므로 $4x^2-6x+2k=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(x)=4x^2-6x+2k$로 놓으면

$g(0)\neq 0 \quad \therefore k\neq 0$ ······ ㉠

방정식 $g(x)=0$의 판별식 $D>0$이므로

$\frac{D}{4}=9-8k>0 \quad \therefore k<\frac{9}{8}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $k<0$ 또는 $0<k<\frac{9}{8}$

5 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)$

$\quad =6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because x>0)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$k-20$ 극솟값	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 주어진 부등식이 성립하려면

$f(2)=k-20\geq 0$

$\therefore k\geq 20$

3. 속도와 가속도에의 활용

바탕 다지기 / P. 61

| 스스로 하기 |

1 (1) $10t$, $10\cdot 3$, -1, $10t$, $6t-10$, 8

(2) $10t$

1 (1) $v=\frac{dx}{dt}=(2t^3-3t^2-12)'=6t^2-6t$

$a=\frac{dv}{dt}=(6t^2-6t)'=12t-6$

(2) $v=\frac{dx}{dt}=(-2t^3+t-2)'=-6t^2+1$

$v=\frac{dv}{dt}=(-6t^2+1)'=-12t$

(3) $v=\frac{dx}{dt}=(t^4+4)'=4t^3$

$a=\frac{dv}{dt}=(4t^3)'=12t^2$

(4) $v=\frac{dx}{dt}=(t^4-3t^3+t)'=4t^3-9t^2+1$

$a=\frac{dv}{dt}=(4t^3-9t^2+1)=12t^2-18t$

기본 익히기 / P. 62

1 ㄱ. 속도는 $f'(t)$이므로 $t=3$일 때, 속도는 0이다.

ㄴ. 속도는 $f'(t)$이므로 $t=5$일 때, 속도는 음수이다.

ㄷ. 속도는 $f'(t)$이므로 $t=6$일 때, 속도는 양수이므로 양의 방향으로 움직인다.

ㄹ. $x=f(t)$의 그래프이므로 $t=7$일 때, 점 P의 좌표 x는 양수이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

2 (1) 속도의 부호가 바뀌면 움직이는 방향이 바뀐 것이다.

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$

따라서 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시각은

$t=2$ 또는 $t=4$

(2) $a=\frac{dv}{dt}=6t-18$

따라서 점 P의 가속도는

$a=2$일 때, $\quad 6\cdot 2-18=-6$

$a=4$일 때, $\quad 6\cdot 4-18=6$

3 $\frac{dl}{dt}=2t+5$이므로 $t=2$일 때, 고무줄의 길이의 순간변화율은 $\quad 2\cdot 2+5=9$

4 $v=\frac{dx}{dt}=4t^3-6t$, $a=\frac{dv}{dt}=12t^2-6=6(2t^2-1)$

$6(2t^2-1)=0$에서 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because t>0)$

따라서 가속도가 0이 되는 순간의 t의 값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

5 $V(t)=10000\left(1-\frac{t}{50}\right)^2=4(t-50)^2$

$=4(t^2-100t+2500)$

$V'(t)=4(2t-100)$ $V'(10)=-320$

따라서 10분 후 물의 부피의 변화율은 분당 -320 L 이다.

실력 키우기 / P. 63

1 두 점 P, Q가 움직이는 속도를 각각 v_p, v_q라고 하면

$v_p=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t,\quad v_q=\frac{dy}{dt}=4t+k$

속도가 같은 순간의 t의 값은 다음 방정식으로부터 구할 수 있다.

$3t^2-2t=4t+k$

따라서 이차방정식 $3t^2-6t-k=0$가 서로 다른 두 실근을 갖는 k값의 범위를 구하면 된다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때, $D>0$인 범위를 구한다.

$\frac{D}{4}=3^2-3(-k)>0$ $\therefore k>-3$

2 $\frac{dh}{dt}=24-10t$

최고 높이에서의 속도는 $\frac{dh}{dt}=0$이므로

$\frac{dh}{dt}=24-10t=0$

$t=\frac{12}{5}$일 때, 최고 높이가 된다.

따라서 최고 높이는

$h\left(\frac{12}{5}\right)=24\cdot\frac{12}{5}-5\cdot\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{144}{5}$

가속도는 $(24-10t)'=-10$

3 점 P의 속도를 v라고 하면 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t$

$\frac{dv}{dt}=6t-6=6(t-1)$

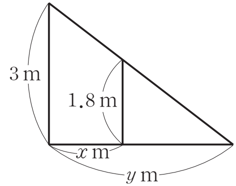
$\frac{dv}{dt}=0$에서 $t=1$

$1\le t\le 3$일 때, v의 증가와 감소를 나타내는 표는 오른쪽과 같다.

t	1	$\cdots$	3
$\frac{dv}{dt}$	0	+	+
v	-3	↗	9

$1\le t\le 3$에서 v는 증가함수이므로 $t=1$일 때 최솟값 -3, $t=3$일 때 최댓값 9를 가진다.

4 오른쪽 그림에서



$3:1.8=y:(y-x)$

$1.8y=3y-3x$

$1.2y=3x$

$\therefore y=\frac{3}{1.2}x=2.5x$

$\frac{dx}{dt}=60$이고 $\frac{dy}{dt}=2.5\frac{dx}{dt}$이므로

$\frac{dy}{dt}=2.5\times 60=150$

따라서 이 사람의 그림자 끝부분은 매분 150 m의 속도로 움직인다.

5 t초 후의 기차의 속도와 가속도를 각각 v, a라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=26-1.3t$ (m/s), $a=\frac{dv}{dt}=-1.3$ (m/s^2)

(1) $t=2$일 때

$v=26-1.3\times 2=23.4$ (m/s)

$a=-1.3$ (m/s^2)

(2) 기차가 정지하는 시각은 $v=0$일 때임을 이용하도록 한다. 즉, $26-1.3t=0$에서 $t=20$일 때 $v=0$이므로 20초 동안 움직인 거리는

$x=26\times 20-0.65\times 20^2=260$ (m)

대단원 확인하기 P. 64, 65

1 $y=x^2+2x$라고 하면 구간 $[0, 2]$에서의 평균변화율 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$는 다음과 같다.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{2^2+2\cdot 2-0}{2-0}=4$

한편 $f'(x)=2x+2$이므로

$f'(a)=2a+2=4$ $\therefore a=1$

2 $R(x)=px+q$, 몫을 $Q(x)$로 놓으면 주어진 조건으로부터 등식

$f(x)=(x-a)^2Q(x)+px+q$

가 성립한다.

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+p$

$\therefore f(a)=pa+q,\ f'(a)=p$

$f(a)=f'(a)\cdot a+q$로부터 $q=f(a)-f'(a)\cdot a$

$\therefore R(x)=f'(a)x+f(a)-f'(a)\cdot a$

$=f'(a)(x-a)+f(a)$

즉, $R(x)=(x-a)f'(a)+f(a)$

3 (1) $\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}f(a)-a\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=f(a)-a\cdot f'(a)=3-2a$

(2) $\lim_{x\to n}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(a)+a^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}(x+a)f(a)-a^2\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=2af(a)-a^2f'(a)=6a-2a^2$

4 $y'=-2x$이므로 곡선 위의 점 $(a, -a^2+k)$에서의 접선의 방정식은 $y+a^2-k=-2a(x-a)$이고 이 접선이 점 $(-1, 0)$을 지나야 하므로

$a^2-k=-2a(-1-a)=2a+2a^2$

$a^2+2a+k=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면

$(-2\alpha)\cdot(-2\beta)=-1,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{4}$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=k$에서 $\quad k=-\frac{1}{4}$

5 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\frac{D}{4}=b^2-3a\cdot c>0 \qquad \therefore b^2-3ac>0$

6 곡선 $y=x^2$ 위의 점을 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$이라 하고 점 P와 점 $(3,\ 0)$ 사이의 거리의 제곱을 $f(a)$라고 하면

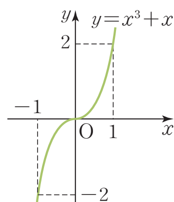
$f(a)=(a-3)^2+a^4=a^4+a^2-6a+9$

$f'(a)=2(2a^3+a-3)=2(a-1)(2a^2+2a+3)$

이고, 모든 실수 a에 대하여 $2a^2+2a+3>0$이므로 $f(a)$는 $a=1$일 때, 최솟값 $f(1)=5$를 가진다.

따라서 곡선 $y=x^2$ 위의 점과 점 $(3,\ 0)$ 사이의 거리의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

7 (1) $y'=3x^2+1>0$이므로 함수 $y=x^3+x$는 증가함수이다. 따라서 극값은 존재하지 않는다. 또 주어진 함수의 그래프는 점 $(0,\ 0)$을 지난다.



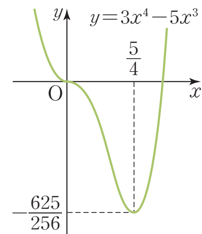
(2) $f(x)=3x^4-5x^3$으로 놓으면

$f'(x)=12x^3-15x^2=3x^2(4x-5)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\frac{5}{4}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	$-\frac{625}{256}$	↗

따라서 극댓값은 존재하지 않고, 극솟값은 $-\frac{625}{256}$이다.



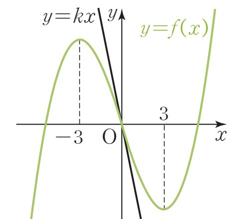
8 $f(x)=x^n-1-n(x-1)$이라고 하면

$f'(x)=nx^{n-1}-n=n(x^{n-1}-1)$이므로

$f(x)$는 $x=1$일 때, 최솟값 $f(1)=0$을 가진다.

따라서 $x\geq0$일 때, $\quad x^{n-1}\geq n(x-1)$

9 주어진 조건으로부터 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같음을 알 수 있다.



x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	0	↘	극소	↗

따라서 $k>f'(0)=-3$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

즉, 방정식 $f(x)=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나는 k값의 범위는 $\quad k>-3$

10 (1) t초 후의 물체의 속도와 가속도를 각각 v, a라고 하면 $v=30-10t$ (m/s), $a=-10$ (m/s^2)

따라서 $t=2$일 때 속도는 10 m/s, 가속도는 -10 m/s^{2}이다.

(2) 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$30-10t=0 \qquad \therefore t=3$

따라서 최고 높이는 $\quad 30\cdot3-5\cdot3^2=45$ (m)

Ⅲ. 다항함수의 적분법

1. 부정적분과 정적분

부정적분과 정적분에 들어가기 전에 / P. 69

1 (1) $4x^2+12x+9$ (2) $4x^2-12x+9$
(3) x^2-1 (4) x^3+3x^2+3x+1
(5) $x^3-6x^2+12x-8$

2 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+n+1}$

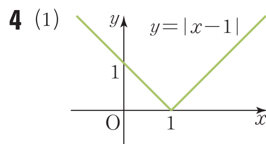
$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3+n}$

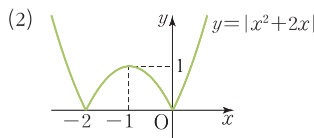
$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)}=\frac{1}{3}$

3 (1) $y'=2x$ (2) $y'=3x^2$
(3) $y'=3x^2-2x+1$ (4) $y'=4x^3+4x$

4 (1)



(2)



1. 부정적분

바탕 다지기 / P. 71

| 스스로 하기 |
1 (1) 3 (2) 2, 2, $2x$

1 (1) $6x$ (2) 5

2 (1) $\int 3\,dx=3x+C$ (2) $\int 8x^3\,dx=2x^4+C$
(3) $\int(4x^3+6x^2+1)dx=x^4+2x^3+x+C$
(4) $\int(x+3)^2dx=\int(x^2+6x+9)dx$
$=\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+C$

개념 넓히기 / P. 72

확인학습

1 (1) $\{(2x+1)^4\}'=8(2x+1)^3$이므로
$\int(2x+1)^3dx$
$=\frac{1}{8}(2x+1)^4+C_0$
$=\frac{1}{8}(16x^4+32x^3+24x^2+8x+1)+C_0$
$=2x^4+4x^3+3x^2+x+\frac{1}{8}+C_0$
$=2x^4+4x^3+3x^2+x+C$

(2) $(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$이므로
$\int(2x+1)^3dx$
$=\int(8x^3+12x^2+6x+1)dx$
$=8\int x^3\,dx+12\int x^2\,dx+6\int x\,dx+\int 1\,dx$
$=(2x^4+C_1)+(4x^3+C_2)+(3x^2+C_3)$
$\quad+(x+C_4)$
$=2x^4+4x^3+3x^2+x+(C_1+C_2+C_3+C_4)$
$=2x^4+4x^3+3x^2+x+C$

기본 익히기 / P. 73

1 (1) $6x^2$ (2) $4x^3-4x+1$

2 (1) $\int(x^2-2)(x+1)dx$
$=\int(x^3+x^2-2x-2)dx$
$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2-2x+C$

(2) $\int(x^2+1)(2-x)dx$
$=\int(-x^3+2x^2-x+2)dx$
$=-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C$

3 (1) $f'(x)=x^3+1$이므로
$f(x)=\int(x^3+1)dx=\frac{1}{4}x^4+x+C$
$f(0)=1$이므로 $C=1$
$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^4+x+1$

(2) $f'(x)=x(x-3)$이므로
$f(x)=\int x(x-3)dx=\int(x^2-3x)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C$

$f(-1)=2$이므로 $\quad C=\frac{23}{6}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{23}{6}$

4 (1) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+5(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+5\Delta x)=3x^2$

(2) $f(x)=\int f'(x)dx=\int 3x^2\,dx=x^3+C$

(3) $f(x)=x^3+C$에서 $f(0)=-1$이므로

$C=-1$

따라서 $f(x)=x^3-1$이므로

$f(-3)=(-3)^3-1=-28$

5 $f'(x)=2x-3$이므로

$f(x)=\int(2x-3)dx=x^2-3x+C$

$f(-1)=-2$이므로 $\quad C=-6$

따라서 구하는 곡선의 방정식은

$f(x)=x^2-3x-6$

6 $F(t)=tf(t)+4.9t^2$에서

양변을 t에 대하여 미분하면

$F'(t)=f(t)+tf'(t)+9.8t$

$F'(t)=f(t)$이므로

$f(t)=f(t)+tf'(t)+9.8t$

$f'(t)=-9.8$

$\therefore f(t)=\int(-9.8)dt=-9.8t+C_1$

$f(0)=30$이므로 $\quad C_1=30$

즉, $f(t)=-9.8t+30$이므로

$F(t)=\int(-9.8t+30)dt=-4.9t^2+30t+C_2$

이때, $F(0)=0$이므로 $\quad C_2=0$

$\therefore F(t)=-4.9t^2+30t$

실력 키우기 / P.74

1 (1) $\int(x+2)^2\,dx-\int(x-2)^2\,dx$

$=\int\{(x+2)^2-(x-2)^2\}dx$

$=\int 8x\,dx=4x^2+C$

(2) $\int(x+1)^3\,dx+\int(x-1)^3\,dx$

$=\int\{(x+1)^3+(x-1)^3\}dx$

$=\int(2x^3+6x)dx$

$=\frac{1}{2}x^4+3x^2+C$

(3) $\int x^2(2x+7)dx$

$+\int(x+5)(-2x^2+3x+1)dx$

$=\int(2x^3+7x^2)dx$

$+\int(-2x^3-7x^2+16x+5)dx$

$=\int(16x+5)dx=8x^2+5x+C$

2 (1) $f(x)+g(x)=\int\{f(x)+g(x)\}'dx$

$=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$

이때, $f(0)=2, g(0)=-1$이므로

$f(0)+g(0)=C=1$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x+1$

(2) $f(x)g(x)=\int\{f(x)g(x)\}'dx$

$=\int(3x^2-2x+2)dx$

$=x^3-x^2+2x+C$

이때, $f(0)=2, g(0)=-1$이므로

$f(0)g(0)=C=-2$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-x^2+2x-2$

(3) $f(x)g(x)=x^3-x^2+2x-2$

$=(x-1)(x^2+2)$

이때, $f(0)=2,\ g(0)=-1$이므로

$f(x)=x^2+2, g(x)=x-1$

3 (1) $F'(x)=f(x)$이므로

$\{f(x)$의 차수$\}=\{F(x)$의 차수$\}-1$

그러므로 주어진 식에서 $F(x)$의 차수는 3이다.

이때, $f(x)$는 이차식이므로

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

로 놓으면

$F(x)=\int(ax^2+bx+c)dx$

$=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$

$F(x)=f(x)+x^3$이므로

$\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C=x^3+ax^2+bx+c$

양변의 계수를 비교하면 $a=3,\ b=6,\ c=6$

$\therefore f(x)=3x^2+6x+6$

(2) $f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\neq0$, n은 자연수)이라고 하면 $F(x)$의 최고차항은 $\frac{a}{n+1}x^{n+1}$이므로 주어진 식에서 양변의 최고차항은 각각

$\frac{3a}{n+1}x^{n+1}$, ax^{n+1}이다.

이때, 주어진 등식이 성립하려면

$\frac{3a}{n+1}=a \qquad \therefore n=2$

따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 a인 이차식이므로

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$

로 놓으면 $f(0)=1$에서 $c=1$

즉, $f(x)=ax^2+bx+1\ (a\neq0)$이므로

$$F(x)=\int(ax^2+bx+1)dx$$

$$=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+x+C$$

$3F(x)=xf(x)-f(x)$이므로

$$ax^3+\frac{3b}{2}x^2+3x+3C$$

$$=ax^3+(b-a)x^2+(1-b)x-1$$

양변의 계수를 비교하면 $a=1, b=-2$

$\therefore f(x)=x^2-2x+1$

4 $f'(x)=1\ (x<-1)$이면

$$f(x)=\int 1\,dx=x+C_1\ (x<-1)$$

$f'(x)=2x\ (-1<x<1)$이면

$$f(x)=\int 2x\,dx=x^2+C_2\ (-1<x<1)$$

$f'(x)=-1\ (x>1)$이면

$$f(x)=\int(-1)dx=-x+C_3\ (x>1)$$

$f(x)$는 원점을 지나므로

$f(0)=C_2=0 \qquad \therefore f(x)=x^2\ \ (-1<x<1)$

$y=f(x)$가 연속이려면

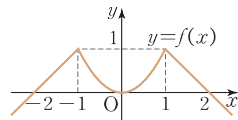
$f(-1)=-1+C_1=(-1)^2 \qquad \therefore C_1=2$

$f(1)=-1+C_3=1^2 \qquad \therefore C_3=2$

즉, 연속함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ x^2 & (-1\le x<1) \\ -x+2 & (x\ge1) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



5 $f'(x)=ax(x-3)\,(a>0)$으로 놓으면

$$f(x)=\int ax(x-3)dx=\int(ax^2-3ax)dx$$

$$=\frac{a}{3}x^3-\frac{3a}{2}x^2+C$$

$x=0$에서 극댓값 5, $x=3$에서 극솟값 -4를 가지므로

$f(0)=C=5$

$f(3)=9a-\frac{27}{2}a+5=-4 \qquad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+5$

2. 정적분

바탕 다지기 / P. 76

| 스스로 하기 |

1 (1) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{31}{2}$

(2) 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$

1 (1) $\int_{-3}^{3}(x^2-2x+3)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^{3}=36$

(2) $\int_{1}^{3}(2y-1)dy=\left[y^2-y\right]_{1}^{3}=6$

(3) $\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)dx$

$$=\int_{1}^{2}(x^2-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{1}^{2}=-\frac{1}{6}$$

(4) $\int_{-1}^{2}(x^2-3x)dx+\int_{4}^{3}x(3-x)dx$

$$-\int_{3}^{2}x(x-3)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(x^2-3x)dx+\int_{3}^{4}(x^2-3x)dx$$

$$+\int_{2}^{3}(x^2-3x)dx$$

$$=\int_{-1}^{4}(x^2-3x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{4}=-\frac{5}{6}$$

개념 넓히기 / P. 77

확인학습

1 $\int_{-2}^{2}(6x^5+2x^3+4x^2-1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(6x^5+2x^3)dx+\int_{-2}^{2}(4x^2-1)dx$

$=\int_{-2}^{2}(4x^2-1)dx=2\int_{0}^{2}(4x^2-1)dx$

$=2\left[\frac{4}{3}x^3-x\right]_{0}^{2}=\frac{52}{3}$

기본 익히기 / P. 78

1 (1) $\frac{d}{dx}\int_{-2}^{x}(3t^2-4t-5)dt=3x^2-4x-5$

(2) $\frac{d}{dx}\int_{2}^{x}(t-2)(t+3)dt=(x-2)(x+3)$

2 $\int_{1}^{2}(4x^3-ax+1)dx=0$이므로

$\left[x^4-\frac{a}{2}x^2+x\right]_{1}^{2}=0$

$16-\frac{3}{2}a=0 \qquad \therefore a=\frac{32}{3}$

3 (1) $\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$

(2) $\int_{0}^{2}f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2+1)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+3x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{1}^{2}=\frac{7}{2}$

4 (1) $f(t)=t^2-2t-1$로 놓고 $f(t)$의 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$\int_{0}^{x}f(t)dt=F(x)-F(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}(t^2-2t-1)dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$

$=F'(0)=f(0)=-1$

(2) $f(t)=t^2+2t+4$로 놓고 $f(t)$의 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$\int_{2}^{x}f(t)dt=F(x)-F(2)$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}(t^2+2t+4)dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$=F'(2)=f(2)=12$

5 (1) $\int_{1}^{3}|x-2|dx$

$=\int_{1}^{2}(-x+2)dx+\int_{2}^{3}(x-2)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{2}^{3}=1$

(2) $\int_{0}^{4}|x-1|dx$

$=\int_{0}^{1}(-x+1)dx+\int_{1}^{4}(x-1)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{1}^{4}=5$

(3) $\int_{-2}^{3}|x^2-x-2|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^2-x-2)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$

$+\int_{2}^{3}(x^2-x-2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{-1}$

$+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{2}^{3}=\frac{49}{6}$

(4) $\int_{-2}^{1}(x|x|-2)dx$

$=\int_{-2}^{0}(-x^2-2)dx+\int_{0}^{1}(x^2-2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-2x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x\right]_{0}^{1}=-\frac{25}{3}$

실력 키우기 / P. 79

1 (1) 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-2$

또 주어진 식에 $x=a$를 대입하면

$\int_{a}^{a}f(t)dt=a^2-2a-3=0$

$a>0$이므로　$a=3$

(2) 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x+1)=3x^2+2x-1$

$\therefore f(x)=3(x-1)^2+2(x-1)-1$

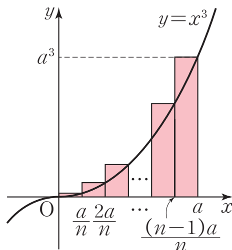
$=3x^2-4x$

또 주어진 식에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t+1)dt=a^3+a^2-2a=0$

$a>0$이므로　$a=1$

2 (1) 구간 $[0, a]$를 n 등분하면 양 끝점과 각 분점의 x좌표는 차례로



$0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \cdots, \frac{(n-1)a}{n}, \frac{na}{n}$

이때의 y좌표는 차례로

$0, \left(\frac{a}{n}\right)^3, \left(\frac{2a}{n}\right)^3, \cdots, \left\{\frac{(n-1)a}{n}\right\}^3, \left(\frac{na}{n}\right)^3$

k번째 직사각형의 넓이는 $\frac{a}{n}\left(\frac{ka}{n}\right)^3$이므로 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S_n이라고 하면

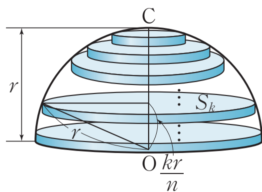
$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}\left(\frac{ka}{n}\right)^3=\frac{a^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$

$=\frac{a^4}{n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{a^4}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{4}$

따라서 구하는 넓이 S는

$S=\lim_{n\to\infty}S_n=a^4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{1}{4}a^4$

(2) 오른쪽 그림과 같이 반구의 밑면에 수직인 반지름 OC를 n등분하고 각 분점에서 반지름 OC에 수직인 평면으로 잘라서 $(n-1)$개의 원기둥을 만든다. 이때, 아래에서 k번째에 있는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는



$\sqrt{r^2-\left(\frac{kr}{n}\right)^2}=r\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}$

k번째 원기둥의 밑넓이를 S_k라고 하면

$S_k=\pi\left(r\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}\right)^2=\pi r^2\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)$

높이가 $\frac{r}{n}$인 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$V_n=\sum_{k=1}^{n-1}\pi r^2\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{r}{n}$

$=\frac{\pi r^3}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)$

$=\frac{\pi r^3}{n}\left\{(n-1)-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right\}$

$=\pi r^3\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\}$

따라서 구하는 반구의 부피 V는

$V=\lim_{n\to\infty}V_n$

$=\lim_{n\to\infty}\pi r^3\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\}$

$=\pi r^3\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi r^3$

3 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=2$ …… ㉠

이때, 구하는 값은

$\int_\alpha^\beta(x^2-4x+2)dx$

$=\int_\alpha^\beta\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

㉠에서

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4^2-8}=2\sqrt{2}$

$\therefore \int_\alpha^\beta(x^2-4x+2)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$=-\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

4 $f(a)=\int_0^2|x-a|dx$

$=\int_0^a(-x+a)dx+\int_a^2(x-a)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_a^2$

$=a^2-2a+2=(a-1)^2+1$

따라서 $f(a)$가 최소가 되게 하는 a의 값은

$a=1$

5 (1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\frac{2}{n}$

$=\int_0^1(1+3x)^3\cdot 2\,dx$

$$=2\int_0^1(27x^3+27x^2+9x+1)dx$$

$$=2\left[\frac{27}{4}x^4+9x^3+\frac{9}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{85}{2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1^3+2^3+\cdots+n^3)}{(1+2+\cdots+n)(1^4+2^4+\cdots+n^4)}$

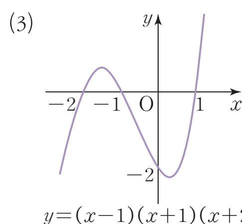
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\cdot\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}}{\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}\cdot\dfrac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n}\right\}}{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\frac{1}{n}\right\}}$$

$$=\frac{\int_0^1 x^2\,dx\cdot\int_0^1 x^3\,dx}{\int_0^1 x\,dx\cdot\int_0^1 x^4\,dx}=\frac{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\cdot\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1}{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\cdot\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1}$$

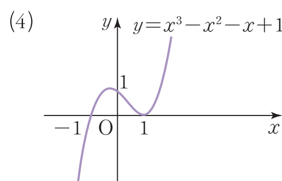
$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{5}{6}$$

(3)



$y=(x-1)(x+1)(x+2)$

(4)



3 시각 t에서의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t+5$$

$t=2$일 때의 속도는 $v(2)$이므로 $v(2)=9$

시각 t에서의 가속도 $a(t)$는

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=6t-4$$

$t=2$일 때의 가속도는 $a(2)$이므로 $a(2)=8$

2. 정적분의 활용

정적분의 활용에 들어가기 전에 / P. 81

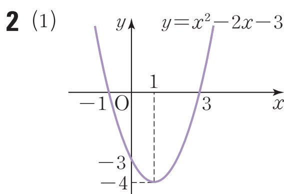
1 (1) $x^2=x+2$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

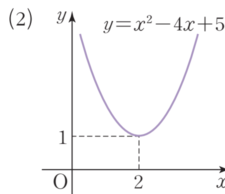
(2) $x^2+2x=3$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

2 (1)



(2)



1. 정적분의 활용

바탕 다지기 / P. 83

| 스스로 하기 |

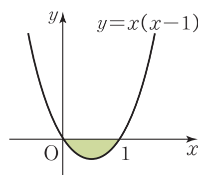
1 2, 2, 9

1 (1) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$x(x-1)=0$에서

$x=0$, $x=1$

구간 $[0,\ 1]$에서 $y\le 0$ 이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_0^1\{-x(x-1)\}dx=\int_0^1(-x^2+x)dx$$

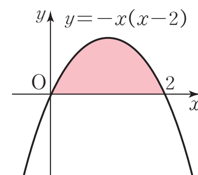
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

(2) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$-x(x-2)=0$에서

$x=0$, $x=2$

구간 $[0,\ 2]$에서 $y\ge 0$



이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2\{-x(x-2)\}dx=\int_0^2(-x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

2 (1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x 좌표는

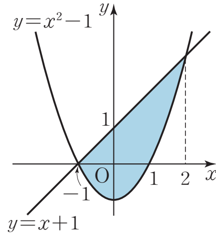
$x^2-1=x+1$에서

$x=-1, x=2$

구간 $[-1,\ 2]$에서

$x^2-1\le x+1$이므로

구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-1}^2\{(x+1)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^2(-x^2+x+2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2=\frac{9}{2}$$

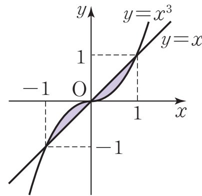
(2) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는

$x^3=x$에서

$x=-1, x=0, x=1$

구간 $[0,\ 1]$에서

$x\ge x^3$이고, 두 함수의 그래프는 원점 대칭이므로 구간 $[-1, 0]$에서의 도형의 넓이는 구간 $[0, 1]$에서의 도형의 넓이와 같다.



따라서 구하는 넓이 S는

$$S=2\int_0^1(x-x^3)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

3 (1) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 물체의 위치의 변화량은

$$\int_0^4 v(t)dt$$

$$=\int_0^4(-t^2+4t-3)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_0^4=-\frac{4}{3}$$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 움직인 거리는

$$\int_0^4|v(t)|dt$$

$$=\int_0^4|-t^2+4t-3|dt$$

$$=\int_0^1(t^2-4t+3)dt+\int_1^3(-t^2+4t-3)dt$$

$$+\int_3^4(t^2-4t+3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$$

$$+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_3^4$$

$$=4$$

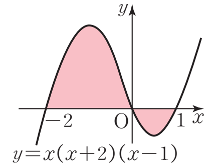
기본 익히기 / P. 84

1 (1) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$x(x+2)(x-1)=0$

에서

$x=-2,\ x=0,\ x=1$



구간 $[-2,\ 0]$에서 $y\ge0$이고 구간 $[0,\ 1]$에서 $y\le0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^1|x(x+2)(x-1)|dx$$

$$=\int_{-2}^0 x(x+2)(x-1)dx$$

$$+\int_0^1\{-x(x+2)(x-1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^0(x^3+x^2-2x)dx$$

$$+\int_0^1(-x^3-x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{37}{12}$$

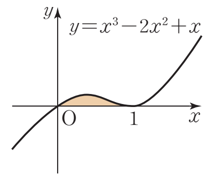
(2) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-2x^2+x=0$에서

$x=0, x=1$

구간 $[0,\ 1]$에서 $y\ge0$

이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx$$

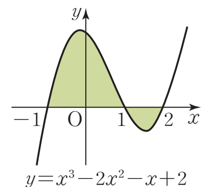
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

(3) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-2x^2-x+2=0$

에서

$x=-1, x=1, x=2$



구간 $[-1,\ 1]$에서 $y\geq 0$이고, 구간 $[1,\ 2]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{2}|x^3-2x^2-x+2|dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)dx$$
$$+\int_{1}^{2}(-x^3+2x^2+x-2)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx$$
$$+\int_{1}^{2}(-x^3+2x^2+x-2)dx$$
$$=2\Big[-\frac{2}{3}x^3+2x\Big]_0^1$$
$$+\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_1^2=\frac{37}{12}$$

(4) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$x^4-3x^3+2x^2=0$

에서

$x=0,\ x=1,\ x=2$

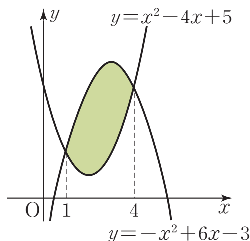
구간 $[0,\ 1]$에서 $y\geq 0$이고 구간 $[1,\ 2]$에서 $y\leq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{0}^{2}|x^4-3x^3+2x^2|dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^4-3x^3+2x^2)dx$$
$$+\int_{1}^{2}(-x^4+3x^3-2x^2)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1$$
$$+\Big[-\frac{1}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\Big]_1^2=\frac{1}{2}$$

2 (1) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^2-4x+5=-x^2+6x-3$에서

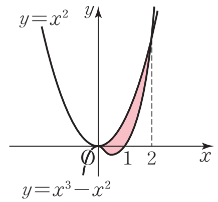
$x=1,\ x=4$



구간 $[1,\ 4]$에서 $-x^2+6x-3\geq x^2-4x+5$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{1}^{4}\{(-x^2+6x-3)-(x^2-4x+5)\}dx$$
$$=\int_{1}^{4}(-2x^2+10x-8)dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\Big]_1^4=9$$

(2) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^3-x^2=x^2$에서

$x=0,\ x=2$

구간 $[0,\ 2]$에서

$x^3-x^2\leq x^2$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{0}^{2}\{x^2-(x^3-x^2)\}dx$$
$$=\int_{0}^{2}(-x^3+2x^2)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\Big]_0^2=\frac{4}{3}$$

3 $y=ax^3$과 $y=1$과의 교점의 x좌표는 $ax^3=1$에서

$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

$$S_1=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}ax^3dx+\Big(1-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\Big)\cdot 1$$
$$=\Big[\frac{a}{4}x^4\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}+\Big(1-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\Big)=1-\frac{3}{4\sqrt[3]{a}}$$

이때, 두 부분 S_1, S_2의 넓이가 같아야 하므로

$S_1=\frac{1}{2}$에서 $\quad \sqrt[3]{a}=\frac{3}{2} \quad \therefore a=\frac{27}{8}$

4 (1) t초 후의 높이를 $h(t)$라고 하면

$$h(t)=55+\int_{0}^{t}(50-10t)dt$$
$$=-5t^2+50t+55$$

따라서 구하는 높이는

$h(6)=-5\cdot 6^2+50\cdot 6+55=175\ (\mathrm{m})$

(2) 최고점에 도달할 때의 속도 $v(t)=0$이므로

$v(t)=50-10t=0$에서 $\quad t=5$

즉, 5초 후에 최고점에 도달한다.

따라서 최고점에 도달하였을 때의 물체의 높이는

$h(5)=-5\cdot 5^2+50\cdot 5+55=180\ (\mathrm{m})$

(3) 지면에 떨어지는 순간의 물체의 높이 $h(t)=0$이므로 $-5t^2+50t+55=0$에서

$t=-1$ 또는 $t=11$

이때, $t>0$이므로 지면에 떨어지는 순간의 시각 t는 $t=11$

따라서 $t=11$일 때의 속도는

$v(11)=50-10\cdot 11=-60\ (\mathrm{m/s})$

(4) $t=5$에서 최고점에 도달하므로 던진 후 2초부터 8초까지 움직인 거리는

$$\int_2^8 |50-10t|\,dt$$
$$=\int_2^5 (50-10t)\,dt+\int_5^8 (-50+10t)\,dt$$
$$=\Big[50t-5t^2\Big]_2^5+\Big[-50t+5t^2\Big]_5^8=90\ (\text{m})$$

5 $v(t)=\begin{cases} t^3 & (0\le t\le 1) \\ (2-t)^3 & (t\ge 1)\end{cases}$

시각 $t=0$일 때의 점 P의 위치가 2이므로 $t=1$일 때의 점 P의 위치 x_1은

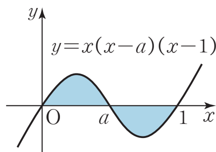
$$x_1=2+\int_0^1 t^3dt=2+\Big[\frac{1}{4}t^4\Big]_0^1=\frac{9}{4}$$

또 $t=1.5$일 때의 점 P의 위치 x_2는

$$x_2=2+\int_0^1 t^3\,dt+\int_1^{1.5}(2-t)^3dt$$
$$=\frac{9}{4}+\Big[-\frac{1}{4}t^4+2t^3-6t^2+8t\Big]_1^{1.5}=\frac{159}{64}$$

실력 키우기 / P. 85

1 (1) 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표는



$x(x-a)(x-1)=0$

에서

$x=0,\ x=a,\ x=1$

$0<a<1$이므로 구간 $[0,\ a]$에서 $y\ge 0$이고, 구간 $[a,\ 1]$에서 $y\le 0$이다. 따라서 구하는 넓이 $S(a)$는

$$S(a)=\int_0^1 |x(x-a)(x-1)|\,dx$$
$$=\int_0^a x(x-a)(x-1)dx+\int_a^1 \{-x(x-a)(x-1)\}dx$$
$$=\int_0^a \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx+\int_a^1 \{-x^3+(a+1)x^2-ax\}dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\Big]_0^a+\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{a+1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\Big]_a^1$$
$$=-\frac{a^4}{6}+\frac{a^3}{3}-\frac{a}{6}+\frac{1}{12}$$

(2) $S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+a^2-\frac{1}{6}$

$$=-\frac{1}{6}(2a-1)(2a^2-2a-1)$$

$0<a<1$에서 $S'(a)=0$을 만족하는 a의 값은

$a=\frac{1}{2}$

$0<a<\frac{1}{2}$일 때 $\quad S'(a)<0$

$\frac{1}{2}<a<1$일 때 $\quad S'(a)>0$

$a=\frac{1}{2}$에서 $S(a)$는 극소이자 최소이다.

따라서 $S(a)$가 최소일 때의 a의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

(3) $\int_0^a y\,dx=\int_a^1 (-y)\,dx$이므로

$\int_0^a y\,dx+\int_a^1 y\,dx=0$, 즉 $\int_0^1 y\,dx=0$

$$\therefore \int_0^1 y\,dx=\int_0^1 x(x-a)(x-1)dx$$
$$=\int_0^1 \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\Big]_0^1$$
$$=\frac{a}{6}-\frac{1}{12}=0$$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

2 (1) $ax^2+bx+c=mx+n$의 두 근이 $x=\alpha,\ x=\beta$이므로

$ax^2+bx+c-(mx+n)=a(x-\alpha)(x-\beta)$

(i) $a>0$일 때

$$S=\int_\alpha^\beta \{mx+n-(ax^2+bx+c)\}dx$$
$$=\int_\alpha^\beta \{-a(x-\alpha)(x-\beta)\}dx$$
$$=-a\int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$$
$$=-a\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\Big]_\alpha^\beta$$
$$=-a\Big\{\frac{1}{3}\beta^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\beta^2+\alpha\beta^2\Big\}+a\Big\{\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2+\alpha^2\beta\Big\}$$
$$=\frac{a}{6}\left(\beta^3-3\alpha\beta^2+3\alpha^2\beta-\alpha^3\right)=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(ii) $a<0$일 때

$$S=\int_\alpha^\beta \{ax^2+bx+c-(mx+n)\}dx$$
$$=\int_\alpha^\beta \{a(x-\alpha)(x-\beta)\}dx$$

$$=a\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$$

$$=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(i), (ii)에서 구하는 넓이 S는

$$\int_{\alpha}^{\beta}|ax^2+bx+c-(mx+n)|dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}|a(x-\alpha)(x-\beta)|dx$$

$$=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는

$2x^2-4x-2=-2x+2$에서

$x=-1,\ x=2$

$\therefore S=\frac{2}{6}(2+1)^3=9$

3 t초 후의 점 R의 속도를 $v(t)$라고 하면

$v(t)=\frac{1}{2}\{v_1(t)+v_2(t)\}=\frac{3}{2}t^2-t$

t초 후의 점 R의 위치 s는

$s=\int_0^t\left(\frac{3}{2}t^2-t\right)dt=\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^2$

점 R가 원점을 지날 때 $s=0$이므로

$\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^2=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=1$

따라서 점 R가 다시 원점을 지날 때까지 걸리는 시간은 1초이다.

4 포물선의 방정식을 $y=ax^2+6$이라고 하면 이 포물선은 $(4, 0)$을 지나므로

$16a+6=0 \qquad \therefore a=-\frac{3}{8}$

$\therefore y=-\frac{3}{8}x^2+6$

색칠한 부분의 넓이 S는

$$S=7\times10-\int_{-4}^{4}\left(-\frac{3}{8}x^2+6\right)dx$$

$$=70-2\int_0^4\left(-\frac{3}{8}x^2+6\right)dx$$

$$=70-2\left[-\frac{1}{8}x^3+6x\right]_0^4=38\ (\text{m}^2)$$

대단원 확인하기 P. 86, 87

1 $f(x)=\int(1+3x+5x^2)dx$일 때

$f'(x)=1+3x+5x^2$이므로

$f'(1)=1+3+5=9$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=9$

2 $\int_2^4 f(x)dx-\int_3^4 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx-\int_3^4 f(x)dx$$

$$=\int_1^4 f(x)dx-\int_3^4 f(x)dx$$

$$=\int_1^4 f(x)dx+\int_4^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3(-x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_1^3=\frac{22}{3}$$

3 (1) $\int_{-1}^{1}x(1+3x)^2\,dx$

$$=\int_{-1}^{1}(x+6x^2+9x^3)dx$$

$$=2\int_0^1 6x^2\,dx=2\left[2x^3\right]_0^1=4$$

(2) $(x-1)(x-2)^2(x-3)$

$=(x^2-4x+4)(x^2-4x+3)$

$=(x^2-4x)^2+7(x^2-4x)+12$

$=x^4-8x^3+16x^2+7x^2-28x+12$

$=x^4-8x^3+23x^2-28x+12$

따라서 구하는 정적분은

$$\int_1^3(x-1)(x-2)^2(x-3)dx$$

$$=\int_1^3(x^4-8x^3+23x^2-28x+12)dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-2x^4+\frac{23}{3}x^3-14x^2+12x\right]_1^3$$

$$=-\frac{4}{15}$$

4 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x^2+f(x)$

$xf'(x)=2x^2$

이 등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$f'(x)=2x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 2x\,dx=x^2+C$

$f(0)=0$이므로 $\qquad C=0$

$\therefore f(2)=4$

5 $\int_0^1 (x-k)^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 (x^2-2kx+k^2)f(x)dx$

$=k^2\int_0^1 f(x)dx-2k\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 x^2f(x)dx$

$=k^2-4k+\int_0^1 x^2f(x)dx$

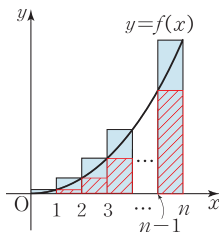
$\int_0^1 x^2f(x)dx$는 상수이므로 상수 a로 놓으면

$k^2-4k+\int_0^1 x^2f(x)dx=k^2-4k+a$

$=(k-2)^2-4+a$

따라서 주어진 정적분의 값이 최소가 되도록 하는 실수 k의 값은 $\quad k=2$

6 $A=\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$는 오른쪽 그림에서 밑변의 길이가 1인 빗금 친 직사각형의 넓이의 합과 같다.

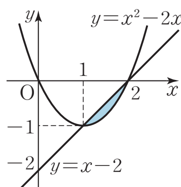


$B=\sum_{k=1}^{n} f(k)$는 오른쪽 그림에서 밑변의 길이가 1인 파란 직사각형의 넓이의 합과 같다.

또 $C=\int_0^n f(x)dx$는 곡선과 x축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

$\therefore A<C<B$

7 (1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는



$x^2-2x=x-2$에서

$x=1, x=2$

구간 $[1, 2]$에서

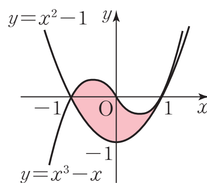
$x^2-2x\le x-2$이므로 구하는 넓이 S는

$S=\int_1^2 \{(x-2)-(x^2-2x)\}dx$

$=\int_1^2 (-x^2+3x-2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2=\frac{1}{6}$

(2) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^3-x=x^2-1$에서

$x=-1, x=1$

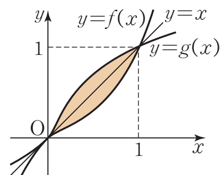
구간 $[-1, 1]$에서

$x^3-x\ge x^2-1$이므로 구하는 넓이 S는

$S=\int_{-1}^1 \{(x^3-x)-(x^2-1)\}dx$

$=2\int_0^1 (-x^2+1)dx=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$

8 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

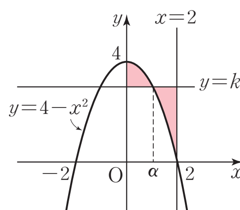


구간 $[0, 1]$에서 $x\ge x^3-x^2+x$이므로 구하는 넓이 S는

$S=2\int_0^1 \{x-(x^3-x^2+x)\}dx$

$=2\int_0^1 (-x^3+x^2)\,dx=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{6}$

9 곡선 $y=4-x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 α라고 하면



$k=4-\alpha^2$

구간 $[0, \alpha]$에서 $k\le 4-x^2$이고, 구간 $[\alpha, 2]$에서 $k\ge 4-x^2$이므로 구하는 넓이 S는

$S=\int_0^\alpha (4-x^2-k)dx+\int_\alpha^2 \{k-(4-x^2)\}dx$

$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3-kx\right]_0^\alpha+\left[kx-4x+\frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^2$

$=-\frac{2}{3}\alpha^3+8\alpha-2k\alpha+2k-\frac{16}{3}$

$k=4-\alpha^2$을 대입하여 정리하면

$S=\frac{4}{3}\alpha^3-2\alpha^2+\frac{8}{3}$

$S'=4\alpha^2-4\alpha$

$S'=0$을 만족하는 α의 값은 $\quad \alpha=0$ 또는 $\alpha=1$

이때, S는 $\alpha=1$일 때 극소이면서 최소이므로 구하는 상수 k의 값은 $\quad k=4-1=3$

10 정지할 때의 속도 $v(t)=0$이므로

$v(t)=30-\frac{3}{2}t=0 \qquad \therefore t=20$

따라서 브레이크를 건 후 완전히 정지할 때까지 걸린 시간은 20초이다.

이때, 달린 거리는

$\int_0^{20}\left(30-\frac{3}{2}t\right)dt=\left[30t-\frac{3}{4}t^2\right]_0^{20}=300\ (\text{m})$

Ⅳ. 확률

1. 조합

조합에 들어가기 전에 / P. 91

1 합의 법칙에 의하여
$4+5=9$(가지)

2 60을 소인수분해 하면
$60=2^2\times3\times5$
2^2의 약수는 $1, 2, 2^2$
3의 약수는 1, 3
5의 약수는 1, 5
따라서 60의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$3\times2\times2=12$(개)

3 (1) 여학생 3명을 묶어서 1명으로 생각하면 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!$가지
이 배열 각각에 대하여 여학생 3명의 순서를 바꾸어 세우는 경우의 수는
$3!$가지
따라서 구하는 경우의 수는
$4!\times3!=144$(가지)
(2) 남학생이 양 끝에 서는 경우의 수는
${}_3P_2$가지
나머지 4명이 일렬로 서는 경우의 수는
$4!$가지
따라서 구하는 경우의 수는
${}_3P_2\times4!=144$(가지)

4 (1) ${}_9C_4\times{}_5C_3\times{}_2C_2=1260$(가지)
(2) ${}_9C_6\times{}_3C_2\times{}_1C_1=252$(가지)

1. 중복조합

바탕 다지기 / P. 94

| 스스로 하기 |
1 2, 2, 5, 10
2 6, 6, 8, 8, 28

1 세 문자 a, b, c 중에서 5개를 택하는 중복조합이므로
${}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(개)

2 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합이므로
${}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$(가지)

기본 익히기 / P. 95

1 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합이므로
${}_{4+5-1}C_5={}_8C_5=56$(가지)

2 (1) 세 문자 a, b, c 중에서 7개를 택하는 중복조합이므로
${}_{3+7-1}C_7={}_9C_2=36$(개)
(2) 네 문자 a, b, c, d 중에서 7개를 택하는 중복조합이므로
${}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$(개)

3 예를 들어 방정식 $x+y+z=9$의 음이 아닌 정수해 중에서 $x=2$, $y=4$, $z=3$은 x를 2개, y를 4개, z를 3개 택하는 것으로 생각하자.
이때, 구하는 해의 개수는 x, y, z에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$(개)

4 모든 학생이 적어도 한 자루의 연필을 받아야 하므로 먼저 네 명의 학생에게 연필 한 자루씩을 나누어 준다. 이때, 남은 연필은 8자루이고, 이를 네 명의 학생에게 나누어 주는 경우이므로 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_{4+8-1}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$(가지)

5 선거에 출마한 3명을 중복을 허용하여 15번 뽑는 경우이다. 즉, 서로 다른 3개에서 15개를 택하는 중복조합이므로
${}_{3+15-1}C_{15}={}_{17}C_{15}={}_{17}C_2=136$(가지)

실력 키우기 / P. 96

1 서로 다른 3개에서 12개를 택하는 중복조합이므로
${}_{3+12-1}C_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=91$(가지)

2 모든 사람이 사과 또는 배를 적어도 1개씩 받아야 하므로 먼저 사과 또는 배를 하나씩 세 사람에게 나누어 준다.

세 사람에게 먼저 주는 과일	나머지 과일을 나누어 주는 경우
사과 3개 ⇒ 1가지	$_{3+2-1}C_2\times{}_{3+5-1}C_5$ $={}_4C_2\times{}_7C_5$
사과 2개, 배 1개 ⇒ $_3C_2$	$_{3+3-1}C_3\times{}_{3+4-1}C_4$ $={}_5C_3\times{}_6C_4$
사과 1개, 배 2개 ⇒ $_3C_1$	$_{3+4-1}C_4\times{}_{3+3-1}C_3$ $={}_6C_4\times{}_5C_3$
배 3개 ⇒ 1가지	$_{3+5-1}C_5\times{}_{3+2-1}C_2$ $={}_7C_5\times{}_4C_2$

따라서 구하는 경우의 수는

$1\times{}_4C_2\times{}_7C_5+{}_3C_2\times{}_5C_3\times{}_6C_4+{}_3C_1\times{}_6C_4\times{}_5C_3$
$+1\times{}_7C_5\times{}_4C_2$
$=126+450+450+126$
$=1152$(가지)

3 (1) 예를 들어 방정식 $x+y+z=10$의 음이 아닌 정수해 중에서 $x=2$, $y=3$, $z=5$는 x를 2개, y를 3개, z를 5개 택하는 것으로 생각하자.
이때, 구하는 해의 개수는 x, y, z에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$(개)

(2) $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$(x', y', z'은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=10$에서
$x'+y'+z'=7$ …… ㉠
구하는 해의 개수는 ㉠의 음이 아닌 정수해를 구하는 것과 같으므로
$_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$(개)

(3) $x=x''+1$, $y=y''+2$, $z=z''+3$ (x'', y'', z''은 음이 아닌 정수)으로 놓으면 $x+y+z=10$에서
$x''+y''+z''=4$ …… ㉠
구하는 해의 개수는 ㉠의 음이 아닌 정수해를 구하는 것과 같으므로
$_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$(개)

4 (i) '+'가 맨 앞에 오는 경우

'+' 구역	'−' 구역	'+' 구역	'−' 구역	'+' 구역

이때, 각 구역에 적어도 1개의 부호는 들어가야 한다.
각 '+' 구역에 '+'를 1개씩 배열하고 남은 3개를 3곳에 배열하는 경우는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합이므로
$_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$(가지)
또 각 '−' 구역에 '−'를 1개씩 배열하고 남은 6개를 2곳에 배열하는 경우는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합이므로
$_{2+6-1}C_6={}_7C_6={}_7C_1=7$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$10\times7=70$(가지)

(ii) '−'가 맨 앞에 오는 경우

'−' 구역	'+' 구역	'−' 구역	'+' 구역	'−' 구역

각 '+' 구역에 '+'를 1개씩 배열하고 남은 4개를 2곳에 배열하는 경우는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복조합이므로
$_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$(가지)
각 '−' 구역에 '−'를 1개씩 배열하고 남은 5개를 3곳에 배열하는 경우는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합이므로
$_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times21=105$(가지)

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$70+105=175$(가지)

5 (1) 집합 B의 원소 5개 중에서 3개를 고르면 주어진 조건을 만족하는 함수 하나가 결정된다.
따라서 구하는 함수를 만드는 경우의 수는
$_5C_3=10$(가지)

(2) 집합 B의 원소 5개 중에서 3개를 고르는 중복조합이므로
$_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$(가지)

2. 이항정리

바탕 다지기 / P. 98

| 스스로 하기 |

1 (1) 8, 24, 32, 16
(2) 10, 40, 80, 80

2 1, 15, 15

1 $(x+y)^{10}$의 전개식의 일반항은
$_{10}C_r\,x^{10-r}y^r$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 10$)
x^5y^5의 계수는 $r=5$일 때이므로
$_{10}C_5=252$

2 ${}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n$이므로
$2^n=256=2^8$
$\therefore n=8$

기본 익히기 / P. 99

1 $\left(ax-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(ax)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r(-1)^r a^{5-r}x^{5-2r}$
(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 5$)
x^3의 계수는 $5-2r=3$에서 $r=1$일 때이고, x^3의 계수가 -80이므로
${}_5C_1 a^4(-1)=-80$, $-{}_5C_1 a^4=-80$
$5a^4=80$, $a^4=16$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

2 (1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r x^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r x^{6-2r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 6$)
$6-2r=0$일 때 $r=3$이므로 구하는 상수항은
${}_6C_3=20$
(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은
${}_8C_r x^{8-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_8C_r(-1)^r x^{8-2r}$
(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 8$)
$(x^2+1)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식에서 상수항이려면 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식에서 x^{-2}항 또는 상수항이어야 하므로
(i) $8-2r=-2$, 즉 $r=5$일 때
${}_8C_5(-1)^5=-{}_8C_3=-56$
(ii) $8-2r=0$, 즉 $r=4$일 때
${}_8C_4(-1)^4=70$
(i), (ii)에서
$-56+70=14$

3 ${}_{n}C_1+{}_{n}C_2+{}_{n}C_3+\cdots+{}_{n}C_n=2^n-1$이고, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로
$2^{11}\le 2^n-1<2^{12}$, $2^{11}+1\le 2^n<2^{12}+1$
$\therefore n=12$

4 $(1+x)^{10}$을 전개하면
$(1+x)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\,x+{}_{10}C_2\,x^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\,x^{10}$
이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
${}_{10}C_0+2\,{}_{10}C_1+2^2\,{}_{10}C_2+\cdots+2^{10}\,{}_{10}C_{10}=3^{10}=59049$

5 (1) $\log_2({}_{99}C_0+{}_{99}C_1+{}_{99}C_2+\cdots+{}_{99}C_{99})$
$=\log_2 2^{99}=99$
(2) ${}_{49}C_1+{}_{49}C_3+{}_{49}C_5+\cdots+{}_{49}C_{49}=2^{49-1}=2^{48}$
$\therefore \log_2({}_{49}C_1+{}_{49}C_3+{}_{49}C_5+\cdots+{}_{49}C_{49})$
$=\log_2 2^{48}=48$

6 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 n개인 부분집합의 개수는
${}_{15}C_n$
따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는
${}_{15}C_1+{}_{15}C_3+{}_{15}C_5+\cdots+{}_{15}C_{15}=2^{14}=16384$(개)

실력 키우기 / P. 100

1 (1) $(1+x)^3$의 전개식의 일반항은
${}_3C_a x^a$ (단, $a=0, 1, 2, 3$)
$(2+x)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_b 2^{4-b}x^b$ (단, $b=0, 1, 2, 3, 4$)
$(1+x)^3(2+x)^4$의 전개식에서 x의 계수는
(i) $a=0$, $b=1$일 때
${}_3C_0\times{}_4C_1\cdot 2^3=32$
(ii) $a=1$, $b=0$일 때
${}_3C_1\times{}_4C_0\cdot 2^4=48$
(i), (ii)에서
$32+48=80$
(2) 주어진 식의 전개식에서 x^2의 계수는 $(1+x)^r$에서 $2\le r\le 10$일 때 ${}_rC_2$의 합이므로
${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
$=\frac{2\times 1}{2}+\frac{3\times 2}{2}+\frac{4\times 3}{2}+\cdots+\frac{10\times 9}{2}$
$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{9}(k+1)k$
$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}k\right)$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\times 9\times 10\times 19+\frac{1}{2}\times 9\times 10\right)=165$

2 $21^{21}=(20+1)^{21}$
$={}_{21}C_0\cdot 20^{21}+{}_{21}C_1\cdot 20^{20}+{}_{21}C_2\cdot 20^{19}+\cdots$
$+{}_{21}C_{18}\cdot 20^3+{}_{21}C_{19}\cdot 20^2+{}_{21}C_{20}\cdot 20+{}_{21}C_{21}$
이때, ${}_{21}C_0\cdot 20^{21}+\cdots+{}_{21}C_{19}\cdot 20^2$은 1000의 배수이므로 나머지는
${}_{21}C_{20}\cdot 20+{}_{21}C_{21}=21\times 20+1=421$

3 $a_n=\left(1+\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{4}{3}\right)^n$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$
$$=\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{3}{4}}=3\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

4 $(1+x)^n$을 전개하면

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots$
$+{}_nC_nx^n$

양변을 x에 대하여 미분하면

$n(1+x)^{n-1}={}_nC_1+2{}_nC_2x+3{}_nC_3x^2+\cdots$
$+n{}_nC_nx^{n-1}$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots+n{}_nC_n=n\cdot 2^{n-1}$

5 똑같은 상품과 서로 다른 상품이 각각 뽑히는 개수에 따른 경우의 수는 다음 표와 같다.

똑같은 상품	서로 다른 상품	경우의 수
10	0	${}_{21}C_0$
9	1	${}_{21}C_1$
8	2	${}_{21}C_2$
⋮	⋮	⋮
0	10	${}_{21}C_{10}$

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{10}$

이때, ${}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{21}=2^{21}$이고,

${}_{21}C_{11}={}_{21}C_{10}$, ${}_{21}C_{12}={}_{21}C_9$, $\cdots$, ${}_{21}C_{21}={}_{21}C_0$이므로

${}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{21}$
$=2({}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{10})=2^{21}$
$\therefore {}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{10}=2^{20}$(가지)

6 $f(n)$은 a_1을 제외한 나머지 9개에서 $(n-1)$개를 택하는 조합이므로

$f(n)={}_9C_{n-1}$
$\therefore f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)$
$={}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9$
$=2^8=256$

프로젝트 / P. 101

1 ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2$
$={}_{7+1}C_3={}_8C_3=56$

2 ${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3$
$={}_{8+1}C_4={}_9C_4=126$

2. 확률의 뜻과 활용

확률의 뜻과 활용에 들어가기 전에 / P.103

1 (1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=5+4-3=6$

(2) $n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=10-5=5$

2 11의 배수가 나오는 경우: 9가지

13의 배수가 나오는 경우: 7가지

11과 13의 공배수가 나오는 경우: 0가지

따라서 구하는 경우의 수는

$9+7=16$(가지)

3 주사위 1개에서 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지, 동전 1개에서 앞면, 뒷면의 2가지가 나오므로 구하는 경우의 수는

$6\times 2=12$(가지)

4 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 순열이므로

${}_4P_3=4\times 3\times 2$
$=24$(가지)

5 ${}_nC_6={}_nC_8$이므로

$8=n-6$
$\therefore n=14$

1. 확률의 뜻과 기본 성질

바탕 다지기 / P. 105

| 스스로 하기 |

1 7, 7

2 285, $\frac{57}{100}$, $\frac{57}{100}$

1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times 6=36$(가지)

두 눈의 수의 곱이 홀수가 되려면 두 주사위에서 모두 홀수의 눈이 나와야 하므로 그 경우의 수는

$3\times 3=9$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

2 전체 7송이 중 2송이를 뽑는 경우의 수는

$_7C_2=21$(가지)

빨간색 장미꽃 4송이 중에서 1송이를 뽑고, 노란색 장미꽃 3송이 중에서 1송이를 뽑는 경우의 수는

$_4C_1\times{}_3C_1=12$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

기본 익히기 / P. 106

1 (1) $\frac{_6C_1}{_{10}C_1}=\frac{3}{5}$

(2) $\frac{_4C_1}{_{10}C_1}=\frac{2}{5}$

(3) 검은 공이 없으므로 구하는 확률은 0이다.

(4) 반드시 일어나는 사건이므로 구하는 확률은 1이다.

2 전체 10개 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

$_{10}C_4=210$(가지)

쌀강정 7개 중에서 2개, 보리 강정 3개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$_7C_2\times{}_3C_2=63$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{63}{210}=\frac{3}{10}$

3 5권의 책을 책꽂이에 일렬로 꽂는 경우의 수는

$5!=120$(가지)

(1) 소설책이 왼쪽 끝에 오도록 꽂는 경우의 수는

$4!=24$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

(2) 소설책, 수필집, 시집을 한 묶음으로 생각하여 3권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$3!=6$(가지)

이들 각각에 대하여 소설책, 수필집, 시집이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$(가지)

소설책, 수필집, 시집이 이웃하는 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

(3) 음악책과 미술책이 양쪽 끝에 오는 경우의 수는

$2!=2$(가지)

이들 각각에 대하여 소설책, 수필집, 시집을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$3!=6$(가지)

음악책과 미술책을 양쪽 끝에 꽂아 5권을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$2\times6=12$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

4 전체 10개의 CD 중에서 4개의 CD를 꺼내는 경우의 수는

$_{10}C_4$ 가지

4개가 모두 공CD인 경우의 수는

$_nC_4$ 가지

이때, 4개 모두 공CD를 꺼낼 확률이 $\frac{1}{14}$이므로

$\frac{_nC_4}{_{10}C_4}=\frac{1}{14}$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{10\times9\times8\times7}=\frac{1}{14}$

$n(n-1)(n-2)(n-3)=6\times5\times4\times3$

$\therefore n=6$

5 타율은 $\frac{(\text{안타 수})}{(\text{타석수})}$이므로 이 선수가 이번 시즌에 칠 수 있는 안타의 개수를 n이라고 하면

$0.305=\frac{n}{200}$ $\quad\therefore n=0.305\times200=61$(개)

실력 키우기 / P. 107

1 집합 A의 부분집합의 개수는

2^4개

원소 2가 속해 있는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3$(개)

따라서 구하는 확률은

$\frac{2^3}{2^4}=\frac{1}{2}$

2 주사위 한 개를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식 $D=a^2-4b=0$이어야 하므로

$a^2=4b$

$a=1$일 때, $1=4b$인 b는 없다.

$a=2$일 때, $4=4b$인 b는 1이다.

$a=3$일 때, $9=4b$인 b는 없다.

$a=4$일 때, $16=4b$인 b는 4이다.

$a=5$일 때, $25=4b$인 b는 없다.

$a=6$일 때, $36=4b$인 b는 없다.

즉, 중근을 갖는 경우의 수는

2가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

3 여섯 개의 숫자 중에서 서로 다른 네 개의 숫자를 택하여 네 자리 정수를 만드는 경우의 수는

${}_6P_4=360$(가지)

이 중 3400보다 큰 경우는

34□□: ${}_4P_2=12$(가지)

35□□: ${}_4P_2=12$(가지)

36□□: ${}_4P_2=12$(가지)

4□□□: ${}_5P_3=60$(가지)

5□□□: ${}_5P_3=60$(가지)

6□□□: ${}_5P_3=60$(가지)

이므로 그 경우의 수는

$12\times3+60\times3=216$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{216}{360}=\frac{3}{5}$

4 10개의 공 중에서 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$(가지)

이 중 8이 적힌 공이 최댓값이 되는 경우는 1에서 7까지 적힌 공 중 3개, 8이 적힌 공 1개를 꺼내는 경우이므로

${}_7C_3=35$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$

5 흰 공의 개수를 n이라고 하자. 이때, 3개의 공이 모두 흰 공이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{{}_nC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$

$n(n-1)(n-2)=120=6\times5\times4$

$\therefore n=6$

2. 확률의 계산과 활용

바탕 다지기 / P. 111

| 스스로 하기 |

1 0.2, 0.7

2 $\frac{7}{24}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{17}{24}$

1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

나오는 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우는

(1, 2), (2, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (6, 6)

의 12가지이므로 그 확률은

$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

나오는 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)

의 9가지이므로 그 확률은

$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

눈의 수의 합이 3의 배수가 되는 사건을 A, 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{4}, P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{36}=\frac{5}{9}$

2 전체 10명 중에서 청소 당번 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_3$가지

3명이 모두 남학생일 사건을 A, 3명이 모두 여학생일 사건을 B로 놓으면 A, B는 서로 배반사건이다.

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{5}$

기본 익히기 / P. 112

1 $P(A^C)=0.4$이므로

$P(A)=1-P(A^C)=1-0.4=0.6$

$P(B^C)=0.3$이므로

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-0.3=0.7$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=0.6+0.7-0.95=0.35$$

2 30장의 복권 중에서 2장을 고르는 경우의 수는

${}_{30}\mathrm{C}_2=435$(가지)

(1) 당첨 복권이 1장도 나오지 않을 경우의 수는

${}_{14}\mathrm{C}_2=91$(가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_{14}\mathrm{C}_2}{{}_{30}\mathrm{C}_2}=\frac{91}{435}$$

(2) 고른 두 장의 복권 중에서 적어도 1장은 당첨 복권이 나올 사건을 A라고 하면 A^C은 당첨 복권이 1장도 나오지 않을 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{91}{435}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{91}{435}=\frac{344}{435}$$

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

두 눈의 수의 합 중에서 12와 서로소인 것은

5, 7, 11

(ⅰ) 두 눈의 수의 합이 5인 경우는

$(1,\ 4), (2,\ 3), (3,\ 2), (4,\ 1)$

의 4가지이므로 그 확률은

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

(ⅱ) 두 눈의 수의 합이 7인 경우는

$(1,\ 6), (2,\ 5), (3,\ 4), (4,\ 3), (5,\ 2), (6,\ 1)$

의 6가지이므로 그 확률은

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

(ⅲ) 두 눈의 수의 합이 11인 경우는

$(5,\ 6), (6,\ 5)$

의 2가지이므로 그 확률은

$$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{1}{3}$$

4 전체 15명의 학생 중에서 3명의 대표를 선발하는 경우의 수는

${}_{15}\mathrm{C}_3=455$(가지)

선발될 대표가 모두 같은 학년일 경우는 모두 1학년이거나 모두 2학년이거나 모두 3학년일 경우이다.

이때, 3명의 대표가 모두 1학년일 사건을 A, 모두 2학년일 사건을 B, 모두 3학년일 사건을 C라고 하면 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$$
$$=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{15}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{15}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{15}\mathrm{C}_3}$$
$$=\frac{4}{455}+\frac{10}{455}+\frac{20}{455}=\frac{34}{455}$$

5 10개의 제비 중에서 3개의 제비를 뽑는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=120$(가지)

당첨 제비가 아닌 제비를 n개라고 하자. 이때, 10개의 제비 중에서 적어도 1개의 당첨 제비를 뽑을 사건을 A라고 하면 A^C은 당첨 제비를 1개도 뽑지 않을 사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{29}{30}$$

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30},\ n(n-1)(n-2)=4\times3\times2$$

$\therefore n=4$

따라서 당첨 제비는 6개이다.

실력 키우기 / P. 113

1 전체 7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_3=35$(개)

직선 l 위의 점에서 2개, 직선 m 위의 점에서 1개를 택하는 사건을 A, 직선 m 위의 점에서 2개, 직선 l 위의 점에서 1개를 택하는 사건을 B라고 하면 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times4}{{}_7\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times3}{{}_7\mathrm{C}_3}$$
$$=\frac{12}{35}+\frac{18}{35}=\frac{6}{7}$$

2 집합 A의 부분집합은 16개이므로 이 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택하는 경우의 수는

${}_{16}\mathrm{C}_2=120$(가지)

선택한 두 집합을 X, Y라고 하자. 이때,

$n(X)\le n(Y)$가 되도록 한다.

한 집합이 다른 집합의 진부분집합이 되는 경우는 $X\subset Y$이고 $X\neq Y$인 경우이므로

(ⅰ) $n(Y)=4$일 때

$\frac{{}_4C_4(2^4-1)}{120}=\frac{1}{8}$

(ⅱ) $n(Y)=3$일 때

$\frac{{}_4C_3(2^3-1)}{120}=\frac{7}{30}$

(ⅲ) $n(Y)=2$일 때

$\frac{{}_4C_2(2^2-1)}{120}=\frac{3}{20}$

(ⅳ) $n(Y)=1$일 때

$\frac{{}_4C_1(2-1)}{120}=\frac{1}{30}$

(ⅰ)~(ⅳ)의 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{7}{30}+\frac{3}{20}+\frac{1}{30}=\frac{13}{24}$

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

$\frac{b}{a}\le2$이므로 $\quad 2a\ge b$

(ⅰ) $a=1$일 때, $b=1, 2$이므로 그 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(ⅱ) $a=2$일 때, $b=1, 2, 3, 4$이므로 그 확률은

$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(ⅲ) $a=3$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로 그 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ⅳ) $a=4$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로 그 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ⅴ) $a=5$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로 그 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ⅵ) $a=6$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로 그 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ⅰ)~(ⅵ)의 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

4 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$(가지)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라고 하면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건은

$D=b^2-4ac<0$

$\therefore ac>\frac{b^2}{4}$

$ac>\frac{b^2}{4}$일 사건을 A라고 하면 $ac\le\frac{b^2}{4}$일 사건은 A^C이고, b의 값에 따라 $ac\le\frac{b^2}{4}$을 만족하는 a, c의 순서쌍 $(a,\ c)$는 다음과 같다.

(ⅰ) $b=2$일 때, $ac\le1$이므로

$(1,\ 1)$

의 1가지

(ⅱ) $b=3$일 때, $ac\le\frac{9}{4}$이므로

$(1,\ 1), (1,\ 2), (2,\ 1)$

의 3가지

(ⅲ) $b=4$일 때, $ac\le4$이므로

$(1,\ 1), (1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4), (2,\ 1), (2,\ 2), (3,\ 1), (4,\ 1)$

의 8가지

(ⅳ) $b=5$일 때, $ac\le\frac{25}{4}$이므로

$(1,\ 1), (1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4), (1,\ 5), (1,\ 6), (2,\ 1), (2,\ 2), (2,\ 3), (3,\ 1), (3,\ 2), (4,\ 1), (5,\ 1), (6,\ 1)$

의 14가지

(ⅴ) $b=6$일 때, $ac\le9$이므로

$(1,\ 1), (1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4), (1,\ 5), (1,\ 6), (2,\ 1), (2,\ 2), (2,\ 3), (2,\ 4), (3,\ 1), (3,\ 2), (3,\ 3), (4,\ 1), (4,\ 2), (5,\ 1), (6,\ 1)$

의 17가지

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여

$P(A^C)=\frac{1}{216}+\frac{3}{216}+\frac{8}{216}+\frac{14}{216}+\frac{17}{216}$

$=\frac{43}{216}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{43}{216}=\frac{173}{216}$

5 정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 두 점을 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$(가지)

두 점을 이은 선분의 길이가 $\frac{3}{2}$보다 작은 경우는 길이가 1이거나 $\sqrt{2}$인 경우이다.
길이가 1일 사건을 A, 길이가 $\sqrt{2}$일 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$

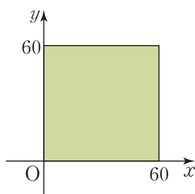
이때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$$

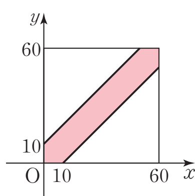
실생활 문제 해결하기 / P. 115

1단계 (1) $0\leq x\leq 60$, $0\leq y\leq 60$
(2) B는 11시 20분에서 11시 40분까지 도착하면 된다.
(3) $|x-y|\leq 10$

2단계 (1)



(2)



3단계 (1) $60\times 60=3600$
(2) $3600-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 50=1100$
(3) $\frac{1100}{3600}=\frac{11}{36}$

3. 조건부확률

조건부확률에 들어가기 전에 / P.117

1 (1) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

(2) ${}_{36}\mathrm{C}_2=\frac{36\times 35}{2\times 1}=630$(개)

2 (1) 남자가 2명 뿐이므로 세 명 모두 남자가 뽑힐 확률은 0이다.
(2) 남자가 2명 뿐이므로 여자가 반드시 포함된다. 따라서 구하는 확률은 1이다.
(3) 남자를 1명, 여자를 2명 뽑으면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$$

3 (1) 2의 배수는 10가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

(2) 3의 배수는 6가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

(3) 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$

2의 배수이면서 3의 배수인 경우, 즉 6의 배수인 경우는 3가지이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{20}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$$

4 5개의 과일 중 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3=10$(가지)

(1) 귤이 포함되는 경우의 수는

${}_4C_2=6$(가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

(2) 귤이 포함되는 사건을 A라고 하면 귤이 포함되지 않는 사건은 A^C이므로 구하는 확률은

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

1. 조건부확률과 확률의 곱셈정리

바탕 다지기 / P. 119

| 스스로 하기 |

1 $2, 1, 1, \frac{1}{2}$

2 $0.08, 0.08, 0.92$

1 $A\cap B=\{6\}$이므로

$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}$이므로

$P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

따라서 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

기본 익히기 / P. 120

1 $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$

$=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$

2 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$

$=1-P(A\cup B)=0.2$

$\therefore P(A\cup B)=0.8$

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$이므로

$P(A\cap B)=0.7+0.4-0.8=0.3$

$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.3}{0.4}=\frac{3}{4}$

3 땅콩이 들어 있는 초콜릿을 먹을 사건을 A, 아몬드가 들어 있는 초콜릿을 먹을 사건을 B라고 하면 첫 번째에 땅콩이 들어 있는 초콜릿을 먹을 확률은

$P(A)=\frac{6}{10}$

사건 A가 일어났다는 가정하에 두 번째에 아몬드가 들어 있는 초콜릿을 먹을 확률은

$P(B|A)=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$

4 1차 시험에 합격할 사건을 A, 2차 시험에 합격할 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{1}{20}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{50}$

구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 확률이므로

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{1}{20}}=\frac{2}{5}$

5 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{4, 5\}$이고, $A\cap B=\{1, 3\}$, $A\cap C=\{5\}$이므로

$P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{3}$,

$P(A\cap B)=\frac{1}{3}, P(A\cap C)=\frac{1}{6}$

(1) $P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 사건 A와 사건 B는 서로 종속이다.

(2) $P(A)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이므로

$P(A\cap C)=P(A)P(C)$

따라서 사건 A와 사건 C는 서로 독립이다.

6 적어도 한 명이 치유될 사건을 A라고 하면 A^C은 한 명도 치유되지 않는 사건이므로

$P(A^C)={}_4C_4\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\frac{16}{625}=\frac{609}{625}$

실력 키우기 / P. 121

1 $\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}+\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\left\{\dfrac{1}{\mathrm{P}(B)}+\dfrac{1}{\mathrm{P}(A)}\right\}\mathrm{P}(A\cap B)$

$=(6+4)\mathrm{P}(A\cap B)=10\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{80}$

2 $\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{2}{7}$이므로

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{7}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{7}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{6}{7}=\mathrm{P}(A)+\dfrac{5}{7}-\dfrac{5}{7}\mathrm{P}(A)$, $\dfrac{2}{7}\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{7}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$

3 거짓말을 할 확률이 $\dfrac{3}{10}$인 증인에게 증거 한 가지를 보여 주었을 때, 다음과 같은 네 가지 경우가 있다.

(ⅰ) 참인 증거를 참이라고 말하는 경우

$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{21}{50}$

(ⅱ) 참인 증거를 거짓이라고 말하는 경우

$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{50}$

(ⅲ) 거짓인 증거를 참이라고 말하는 경우

$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{25}$

(ⅳ) 거짓인 증거를 거짓이라고 말하는 경우

$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{7}{25}$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 증거 한 가지를 보여 주었을 때, 참인 증거라고 대답할 확률은

$\dfrac{21}{50}+\dfrac{3}{25}=\dfrac{27}{50}$

4 문제를 읽지 않고 답을 선택하여 1문제를 맞힐 확률은 $\dfrac{1}{2}$이다.

이때, 시험에서 합격하려면 8문제 이상을 맞혀야 하므로 8문제 또는 9문제 또는 10문제를 맞혀야 한다.

따라서 구하는 확률은

${}_{10}\mathrm{C}_8\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\dfrac{1}{2}\right)^9\cdot\dfrac{1}{2}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$

$=\dfrac{45}{2^{10}}+\dfrac{10}{2^{10}}+\dfrac{1}{2^{10}}=\dfrac{56}{2^{10}}=\dfrac{7}{128}$

5 (ⅰ) A 팀이 우승하는 경우

A 팀이 3번째 시합까지 2번을 이기고 4번째 시합에서 이기면 된다.

따라서 A 팀이 우승할 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{162}{625}$

(ⅱ) B 팀이 우승하는 경우

두 팀 A, B의 경기에서 A 팀의 승률이 $\dfrac{3}{5}$이므로 B 팀의 승률은 $\dfrac{2}{5}$이다. 이때, B 팀이 3번째 시합까지 2번을 이기고 4번째 시합에서 이기면 된다.

따라서 B 팀이 우승할 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\cdot\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{72}{625}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\dfrac{n}{m}=\dfrac{162}{625}+\dfrac{72}{625}=\dfrac{234}{625}$ $\quad\therefore m+n=859$

대단원 확인하기 P. 122, 123

1 세 명이 적어도 한 권의 공책을 받아야 하므로 먼저 세 명에게 공책 한 권씩을 나누어 준다. 이때, 남은 공책 5권을 세 명에게 나누어 주는 경우는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합이므로

${}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$(가지)

2 $(x+1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_a x^a$ (단, $a=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

$(3x-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_b(3x)^b(-2)^{4-b}={}_4\mathrm{C}_b\cdot 3^b(-2)^{4-b}x^b$

(단, $b=0, 1, 2, 3, 4$)

$(x+1)^5(3x-2)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는

(ⅰ) $a=2$, $b=0$일 때

${}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0\cdot 3^0(-2)^4=160$

(ⅱ) $a=1$, $b=1$일 때

${}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\cdot 3(-2)^3=-480$

(iii) $a=0$, $b=2$일 때

$${}_5C_0\times{}_4C_2\cdot3^2(-2)^2=216$$

(i), (ii), (iii)에서

$160-480+216=-104$

3 ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$이고, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$500<2^n-1<1000$

$501<2^n<1001$ $\quad\therefore n=9$

4 (1) $(1+x)^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1x+{}_{2n}C_2x^2+{}_{2n}C_3x^3+\cdots+{}_{2n}C_{2n}x^{2n}$ $\cdots$ ㉠

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0={}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$

$\therefore {}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$
$={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}$

한편 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$

$\therefore {}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$
$={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$

(2) $(1+x)^n$의 전개식을 다음 두 가지로 나타낼 수 있다.

${}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ $\cdots$ ㉠

${}_nC_n+{}_nC_{n-1}x+{}_nC_{n-2}x^2+\cdots+{}_nC_0x^n$ $\cdots$ ㉡

이때, ㉠과 ㉡을 곱하면

$(1+x)^{2n}=({}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n)$
$\times({}_nC_n+{}_nC_{n-1}x+{}_nC_{n-2}x^2+\cdots+{}_nC_0x^n)$

양변의 x^n의 계수를 비교하면

${}_{2n}C_n={}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+\cdots+{}_nC_n{}^2$

$\therefore {}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+\cdots+{}_nC_n{}^2=\dfrac{(2n)!}{n!n!}$

5 B와 C의 시합에서 B가 이기는 경우와 C가 이기는 경우로 나누어 생각한다.

(i) B가 C를 이기고, A가 B를 이기는 경우

$\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$

(ii) C가 B를 이기고, A가 C를 이기는 경우

$\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{16}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{16}=\dfrac{9}{16}$

6 두 명 중에서 적어도 한 명이 공을 넣을 사건을 A라고 하면 A^C은 한 명도 공을 넣지 못할 사건이므로

$P(A^C)=0.1\times0.2=0.02$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-0.02=0.98$

7 A 신문을 구독하는 사건을 A, B 신문을 구독하는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\dfrac{24}{40}=\dfrac{3}{5}$, $P(B)=\dfrac{16}{40}=\dfrac{2}{5}$

A, B 어느 신문도 구독하지 않는 사건은 $(A\cup B)^C$이므로

$P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=\dfrac{8}{40}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore P(A\cup B)=\dfrac{4}{5}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}-P(A\cap B)$ $\quad\therefore P(A\cap B)=\dfrac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$$

8 전류가 $P\to a\to c\to Q$로 흐르는 사건을 A, 전류가 $P\to b\to d\to Q$로 흐르는 사건을 B라고 하면

$P(A)=0.2\times0.4=0.08$

$P(B)=0.3\times0.5=0.15$

이때, 스위치가 모두 닫혀 있는 경우는 $A\cap B$이고, 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=0.08\times0.15=0.012$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=0.08+0.15-0.012=0.218$

9 공을 한 개 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다. 이때, 10회의 시행 중 흰 공이 8회 이하로 나오려면 전체의 경우에서 9회 나오는 경우와 10회 나오는 경우를 제외하면 되므로 구하는 확률은

$$1-\left\{{}_{10}C_9\left(\frac{1}{3}\right)^9\cdot\frac{2}{3}+{}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}=1-\frac{7}{3^9}$$

10 문제를 읽지 않고 답을 선택하여 1문제를 맞힐 확률은 $\dfrac{1}{5}$이다. 이때, 이 시험에서 합격하려면 9문제 이상을 맞혀야 하므로 9문제 또는 10문제를 맞혀야 한다. 따라서 구하는 확률은

$${}_{10}C_9\left(\frac{1}{5}\right)^9\cdot\frac{4}{5}+{}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}=\frac{41}{5^{10}}$$

Ⅴ. 통계

1. 확률분포

확률분포에 들어가기 전에 / P. 129

1 통화 시간의 평균 m은

$m=\frac{83+78+93+73+88}{5}=\frac{415}{5}=83$

통화 시간의 분산 σ^2은

$\sigma^2=\frac{0+(-5)^2+10^2+(-10)^2+5^2}{5}=50$

통화 시간의 표준편차 σ는

$\sigma=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

2 (1) $p_1+p_2+\cdots+p_n=\sum_{i=1}^{n}p_i$

(2) ${}_nC_0q^n+{}_nC_1pq^{n-1}+{}_nC_2p^2q^{n-2}+\cdots+{}_nC_np^n$

$=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_kp^kq^{n-k}$

3 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-2mx_k+m^2)$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\frac{2m}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+m^2$

$=A-2m^2+m^2=A-m^2$

4 1회의 시행에서 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$인 독립시행이다.

(1) 앞면이 2번 나올 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

(2) 앞면이 3번 나올 확률은

${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

1. 확률변수와 확률분포

바탕 다지기 / P. 131

| 스스로 하기 |

1 $\{2, 4\}$, $\frac{1}{6}$

2 (1) k, 1　　(2) 1, $\frac{1}{4}$

1 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이므로 각각의 확률을 구하면

$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_4C_0}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$X\geq1$인 경우는 $X=1$일 때와 $X=2$일 때이므로 구하는 확률은

$P(X\geq1)=P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{8}{15}+\frac{1}{15}$

$=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

기본 익히기 / P. 132

1 $2k+\frac{1}{4}+k+\frac{1}{4}=1$이므로

$3k+\frac{1}{2}=1$

$\therefore k=\frac{1}{6}$

이때, $2\leq X\leq3$인 경우는 $X=2$일 때와 $X=3$일 때이므로 구하는 확률은

$P(2\leq X\leq3)=P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

2 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수가 한 개도 짝수가 아닐 확률은 눈의 수가 모두 홀수가 나올 확률이므로

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\frac{a}{8}$

$\therefore a=1$　　…… ㉠

$\frac{a}{8}+\frac{3}{8}+\frac{b}{8}+\frac{1}{8}=1$이므로

$a+b=4$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1, b=3$

3 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	$\cdots$	10	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$2k$	$3k$	$\cdots$	$10k$	1

이때, $k+2k+\cdots+10k=1$이므로

$(1+2+\cdots+10)k=1$

$55k=1$

$\therefore k=\dfrac{1}{55}$

4 (1) $f(x)$는 확률밀도함수이므로

$\int_0^3 f(x)dx=1$

$\int_0^3 kx\,dx=1$

$\left[\dfrac{k}{2}x^2\right]_0^3=\dfrac{9}{2}k-0=1$

$\therefore k=\dfrac{2}{9}$

(2) $\mathrm{P}(1\le X\le 2)$

$=\int_1^2 \dfrac{2}{9}x\,dx$

$=\left[\dfrac{1}{9}x^2\right]_1^2=\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{9}$

$=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

(3) $\mathrm{P}\left(X\ge\dfrac{5}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{2}\le X\le 3\right)$

$=\int_{\frac{5}{2}}^3 \dfrac{2}{9}x\,dx$

$=\left[\dfrac{1}{9}x^2\right]_{\frac{5}{2}}^3$

$=1-\dfrac{25}{36}=\dfrac{11}{36}$

5 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times 5\times a=1$

$\therefore a=\dfrac{2}{5}$

이때, 확률밀도함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{15}x & (0\le x\le 3)\\ -\dfrac{1}{5}x+1 & (3\le x\le 5)\end{cases}$$

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\int_0^3 \dfrac{2}{15}x\,dx=\dfrac{3}{5}$이므로

$b\le 3$

$\mathrm{P}(0\le X\le b)=\dfrac{1}{15}$이므로

$\int_0^b \dfrac{2}{15}x\,dx=\dfrac{1}{15}$

$\left[\dfrac{1}{15}x^2\right]_0^b=\dfrac{1}{15}b^2=\dfrac{1}{15}$

$\therefore b=1\ (\because b\ge 0)$

실력 키우기 / P. 133

1 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=i)$	p_1	p_2	p_3	p_4	1

확률 p_1, p_2, p_3, p_4가 이 순서로 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열을 이루므로

$p_2=\dfrac{1}{2}p_1,\ p_3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2p_1,\ p_4=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3p_1$

이때, $p_1+p_2+p_3+p_4=1$이므로

$p_1+p_2+p_3+p_4$

$=p_1+\dfrac{1}{2}p_1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2p_1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3p_1$

$=p_1+\dfrac{1}{2}p_1+\dfrac{1}{4}p_1+\dfrac{1}{8}p_1$

$=\dfrac{15}{8}p_1=1$

$\therefore p_1=\dfrac{8}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X=4)=p_4=\dfrac{1}{8}p_1$

$=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{8}{15}$

$=\dfrac{1}{15}$

2 (1) 동전을 두 번 던질 때, 나올 수 있는 경우는

(앞면, 앞면), (앞면, 뒷면),

(뒷면, 앞면), (뒷면, 뒷면)

이때, (앞면, 앞면)이 나오면 점 P의 좌표는 2, (앞면, 뒷면) 또는 (뒷면, 앞면)이 나오면 점 P의 좌표는 0, (뒷면, 뒷면)이 나오면 점 P의 좌표는 -2이다.

즉, 확률변수 X가 가지는 값은 -2, 0, 2이므로 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=-2)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	-2	0	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) $\mathrm{P}(X\le 0)=\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=0)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

3 확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이므로 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{20}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}$

$=\frac{4}{5}$

4 (1) $f(x)$는 확률밀도함수이므로

$\int_0^2 f(x)dx=1$

$\int_0^2\left(\frac{1}{4}x+k\right)dx=1$

$\left[\frac{1}{8}x^2+kx\right]_0^2=\frac{1}{2}+2k-0=1$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

(2) $X\ge\frac{1}{2}$인 사건을 A, $X\le 1$인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{1}{2}\,\middle|\,X\le 1\right)=\mathrm{P}(A|B)$

$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$

$=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_{\frac{1}{2}}^1$

$=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{8}\right)$

$=\frac{7}{32}$

$\mathrm{P}(B)$를 구하면

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(X\le 1)$

$=\int_0^1\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_0^1$

$=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)-0$

$=\frac{3}{8}$

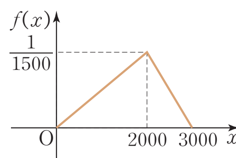
따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{1}{2}\,\middle|\,X\le 1\right)=\frac{\frac{7}{32}}{\frac{3}{8}}=\frac{7}{12}$

5 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times 3000\times a=1$

$\therefore a=\frac{1}{1500}$



따라서 구입한 전구 2개 중 적어도 1개는 2000시간 이상 사용하게 될 확률은

$1-\{\mathrm{P}(X\le 2000)\}^2$

$=1-\left(\frac{1}{2}\times 2000\times\frac{1}{1500}\right)^2$

$=1-\frac{4}{9}$

$=\frac{5}{9}$

2. 평균과 표준편차

바탕 다지기 / P. 135

| 스스로 하기 |

1 3, 9, 2

2 2, -7, 36

1 (1) $\mathrm{E}(X)=(-3)\cdot\frac{1}{4}+(-2)\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}$
$=0$

$\mathrm{V}(X)=(-3)^2\cdot\frac{1}{4}+(-2)^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}-0$
$=\frac{13}{2}$

(2) $\mathrm{E}(X)=0$, $\mathrm{V}(X)=\frac{13}{2}$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X+3)$
$=3\mathrm{E}(X)+3=3$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X+3)$
$=3^2\mathrm{V}(X)$
$=9\cdot\frac{13}{2}$
$=\frac{117}{2}$

2 확률밀도함수 $f(x)=\frac{1}{2}\ (-1\le x\le 1)$이므로

$\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^{1}xf(x)dx$
$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x\,dx$
$=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$
$=0$

$\mathrm{V}(X)=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2dx-0$
$=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)$
$=\frac{1}{3}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$
$=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

기본 익히기 / P. 136

1 받을 수 있는 상금을 확률변수 X라고 하면

X	10	5	3	2	1	0	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{67}{100}$	1

$\mathrm{E}(X)=10\cdot\frac{1}{100}+5\cdot\frac{1}{50}+3\cdot\frac{1}{20}+2\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{3}{20}+0\cdot\frac{67}{100}$
$=0.7$(만 원)

따라서 참가자 한 사람이 받을 수 있는 상금에 대한 기댓값은 7000원이다.

2 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=3+5^2$
$=28$

3 $\frac{1}{4}+2a+\frac{1}{4}+a=1$이므로

$3a+\frac{1}{2}=1$

$\therefore a=\frac{1}{6}$

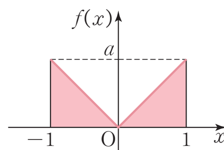
$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{6}$
$=\frac{7}{3}$

$\mathrm{V}(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{3}\right)^2$
$=\frac{19}{18}$

따라서 확률변수 $Y=3X+1$의 분산은

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X+1)$
$=3^2\mathrm{V}(X)=9\cdot\frac{19}{18}$
$=\frac{19}{2}$

4 (1) 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로



$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a=1$

$\therefore a=1$

이때, 확률밀도함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x\le 1) \\ -x & (-1\le x\le 0) \end{cases}$$

X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\int_{-1}^{1}xf(x)dx\\&=\int_{-1}^{0}x\cdot(-x)dx+\int_{0}^{1}x\cdot x\,dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}\\&=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\&=0\end{aligned}$$

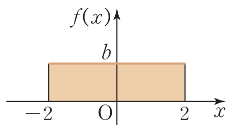
X의 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\int_{-1}^{0}x^2\cdot(-x)dx+\int_{0}^{1}x^2\cdot x\,dx-0\\&=\left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

X의 표준편차 $\sigma(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\sigma(X)&=\sqrt{\mathrm{V}(X)}\\&=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(2) 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로



$4b=1$

$\therefore b=\frac{1}{4}$

이때, 확률밀도함수 $f(x)$는

$f(x)=\frac{1}{4}$ (단, $-2\le x\le 2$)

X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\int_{-2}^{2}xf(x)dx\\&=\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}x\,dx\\&=\left[\frac{1}{8}x^2\right]_{-2}^{2}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\end{aligned}$$

X의 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\int_{-2}^{2}x^2f(x)dx-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}x^2dx-0\\&=\left[\frac{1}{12}x^3\right]_{-2}^{2}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

X의 표준편차 $\sigma(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\sigma(X)&=\sqrt{\mathrm{V}(X)}\\&=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

5 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\times0.05+2\times0.2+3\times0.25+4\times0.4\\&\quad+5\times0.1=3.3\end{aligned}$$

X의 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=1^2\times0.05+2^2\times0.2+3^2\times0.25\\&\quad+4^2\times0.4+5^2\times0.1-3.3^2\\&=1.11\end{aligned}$$

X의 표준편차 $\sigma(X)$를 구하면

$\sigma(X)=\sqrt{1.11}$

실력 키우기 / P. 137

1 (1) $a+\frac{a}{2}+a^2=1$이므로

$2a+a+2a^2=2$

$2a^2+3a-2=0$

$(a+2)(2a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

이때, $a>0$이므로

$a=\frac{1}{2}$

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=(-1)\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}\\&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=(-1)^2\cdot\frac{1}{2}+0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2\\&=\frac{11}{16}\end{aligned}$$

2 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

따라서 확률변수 $4X-X^2$의 평균은

$$\mathrm{E}(4X-X^2)=4\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(X^2)=4\cdot\frac{7}{2}-\frac{91}{6}=-\frac{7}{6}$$

3 $f(x)=ax+b\ (0\le x\le 3)$는 확률밀도함수이므로

$$\int_0^3 f(x)dx=1$$

$$\int_0^3 (ax+b)dx=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f(3)=0$이므로

$3a+b=0$

$\therefore b=-3a$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$$\int_0^3 (ax-3a)dx=\left[\frac{a}{2}x^2-3ax\right]_0^3=\frac{9a}{2}-9a=1$$

$\therefore a=-\frac{2}{9}$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{9}x+\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^3 xf(x)dx=\int_0^3\left(-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x\right)dx=\left[-\frac{2}{27}x^3+\frac{1}{3}x^2\right]_0^3=-2+3=1$$

$$\mathrm{V}(X)=\int_0^3 x^2f(x)dx-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\int_0^3\left(-\frac{2}{9}x^3+\frac{2}{3}x^2\right)dx-1=\left[-\frac{1}{18}x^4+\frac{2}{9}x^3\right]_0^3-1=-\frac{9}{2}+6-1=\frac{1}{2}$$

4 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	$\cdots$
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$	$\cdots$

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\cdots$$

$a_n=\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$으로 놓고, 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=1\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{3}{4}S_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면

$$\frac{1}{4}S_n=1\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\therefore S_n=4\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

따라서 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하면

$$\mathrm{E}(X)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}4\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=4$$

5 (1) 효주의 원점수 65점은 80점으로 변환되었으므로

$$80=15\left(\frac{65-m}{\sigma}\right)+50$$

$$\sigma=\frac{65-m}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

승오의 원점수 60점은 65점으로 변환되었으므로

$65=15\left(\frac{60-m}{\sigma}\right)+50$

$\sigma=60-m$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\frac{65-m}{2}=60-m$

$m-55=0$

$\therefore m=55, \sigma=5$

(2) $Y=15\left(\frac{X-55}{5}\right)+50=3X-115$

이때, $E(X)=m=55$, $\sigma(X)=\sigma=5$이므로

$E(Y)=E(3X-115)$
$=3E(X)-115=50$

$\sigma(Y)=\sigma(3X-115)$
$=3\sigma(X)=15$

3. 이항분포

바탕 다지기 / P. 139

| 스스로 하기 |

1 독립, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, ${}_{10}C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}$

2 $\frac{1}{3}$, 60

1 (1) 0, 1, 2, ⋯, 100

(2) 씨앗이 발아하는 것은 독립시행이고, 발아율이 20 %이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

따라서 구하는 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{100}C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{100-x}$

(단, $x=0, 1, 2, \cdots, 100$)

(3) $E(X)=np=100\cdot\frac{1}{5}=20$

$V(X)=npq=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{16}=4$

기본 익히기 / P. 140

1 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로 구하는 확률질량함수는

$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{5-x}$

(단, $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

2 병뚜껑을 500번 던졌을 때, 윗면이 300번 나왔으므로 병뚜껑을 한 번 던질 때 윗면이 나올 확률은

$\frac{300}{500}=\frac{3}{5}$

병뚜껑의 윗면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{3}{5}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{5-x}$

(단, $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

이때, 시합에서 이기려면 4번 이상 윗면이 나와야 하므로 구하는 확률은

$P(X\geq4)=P(X=4)+P(X=5)$
$={}_5C_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{2}{5}+{}_5C_5\left(\frac{3}{5}\right)^5$
$=\frac{5\cdot3^4\cdot2}{5^5}+\frac{3^5}{5^5}=\frac{1053}{3125}$

3 확률변수 X는 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로

$E(X)=np=12$ …… ㉠

$\sigma(X)=\sqrt{npq}=3$ (단, $q=1-p$) …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{12q}=3$

$q=\frac{3}{4}$ $\therefore p=\frac{1}{4}, n=48$

4 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=10\cdot\frac{1}{2}=5$

이때, 상금으로 $(2X+100)$원을 받으므로 구하는 상금의 기댓값은

$E(2X+100)=2E(X)+100$
$=2\times5+100=110$(원)

5 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20$

$V(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$

따라서 X^2의 평균 $E(X^2)$은

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$
$=16+20^2=416$

실력 키우기 / P. 141

1 1회의 시행에서 같은 색의 공이 나올 확률은

$\frac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

확률변수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로 구하는 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{10-x}$

(단, $x=0, 1, 2, \cdots, 10$)

2 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=k)={}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$

(단, $k=0, 1, 2, \cdots, 10$)

따라서 상금의 기댓값은

$$E(25^k)=\sum_{k=0}^{10}25^k\cdot{}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\left(\frac{25}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$
$$=\left(\frac{25}{6}+\frac{5}{6}\right)^{10}=5^{10}$$

따라서 상금의 기댓값은 5^{10}원이다.

3 확률변수 X는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$을 따른다. 이때

$$\sum_{x=0}^{18}x^2{}_{18}C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$$
$$=E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$

이므로 $E(X)$와 $V(X)$를 구하면

$E(X)=18\cdot\frac{1}{3}=6$

$V(X)=18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=4$

$$\therefore \sum_{x=0}^{18}x^2{}_{18}C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$$
$$=V(X)+\{E(X)\}^2$$
$$=4+36=40$$

4 확률변수 X는 이항분포 $B\left(8, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=8\cdot\frac{1}{2}=4$

$V(X)=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=2$

이때, 확률변수 $(X-a)^2$의 평균 $E((X-a)^2)$을 구하면

$$E((X-a)^2)$$
$$=E(X^2-2aX+a^2)$$
$$=E(X^2)-2aE(X)+a^2$$
$$=V(X)+\{E(X)\}^2-2aE(X)+a^2$$
$$=2+16-2a\times4+a^2$$
$$=a^2-8a+18=(a-4)^2+2$$

따라서 $E((X-a)^2)$의 최솟값은 2이다.

5 예약한 사람 중에서 실제로 탑승하지 않는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(210, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$E(X)=210\cdot\frac{1}{10}=21$

실제로 탑승하지 않는 사람의 수가 평균적으로 21명이므로 189명은 탑승을 한다고 할 수 있다.

따라서 남는 좌석 수의 평균은

$200-189=11$(석)

4. 정규분포

바탕 다지기 / P. 143

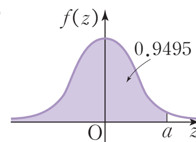
| 스스로 하기 |

1 (1) 0.4750, 0.9750

(2) 0.4987, 0.8400

2 3, 3, 3, -2, 2, 0.4772, 0.9544

1 (1)



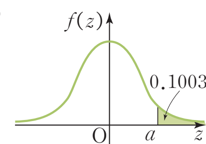
$P(Z\le a)=0.9495$
$=0.5+0.4495$
$=0.5+P(0\le Z\le 1.64)$

이때, $P(Z\le a)=0.5+P(0\le Z\le a)$이므로

$P(0\le Z\le a)=P(0\le Z\le 1.64)$

$\therefore a=1.64$

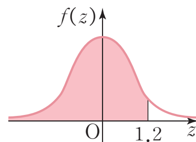
(2)



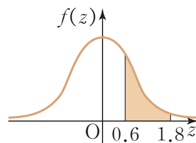
$\mathrm{P}(Z \geq a)=0.1003$
$=0.5-0.3997$
$=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.28)$
이때, $\mathrm{P}(Z \geq a)=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq a)$이므로
$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq a)=\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.28)$
$\therefore a=1.28$

기본 익히기 / P. 144

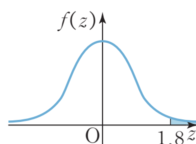
1 (1) $\mathrm{P}(X \leq 66)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{X-60}{5} \leq \frac{66-60}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \leq 1.2)$
$=0.5+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.2)$
$=0.5+0.3849$
$=0.8849$



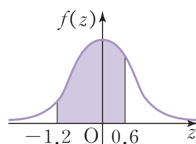
(2) $\mathrm{P}(63 \leq X \leq 69)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{63-60}{5} \leq \frac{X-60}{5} \leq \frac{69-60}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(0.6 \leq Z \leq 1.8)$
$=\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.8)$
$\quad -\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.6)$
$=0.4641-0.2257$
$=0.2384$



(3) $\mathrm{P}(X \geq 69)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{X-60}{5} \geq \frac{69-60}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \geq 1.8)$
$=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.8)$
$=0.5-0.4641$
$=0.0359$



(4) $\mathrm{P}(54 \leq X \leq 63)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{54-60}{5} \leq \frac{X-60}{5} \leq \frac{63-60}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(-1.2 \leq Z \leq 0.6)$
$=\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.2)$
$\quad +\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.6)$
$=0.3849+0.2257$
$=0.6106$



2 (1) 곡선의 대칭축이 평균이므로
$m_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{B}}<m_{\mathrm{C}}$
(2) 표준편차 σ가 커지면 곡선은 양쪽으로 퍼지므로
$\sigma_{\mathrm{B}}=\sigma_{\mathrm{C}}<\sigma_{\mathrm{A}}$

3 한 개의 동전을 400번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=400 \cdot \frac{1}{2}=200$
$\mathrm{V}(X)=400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}=100$
이때, 시행 횟수 $n=400$은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200, 10^2)$을 따른다.
따라서 확률변수 X가 190 이상 220 이하일 확률은
$\mathrm{P}(190 \leq X \leq 220)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{190-200}{10} \leq Z \leq \frac{220-200}{10}\right)$
$=\mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 2)$
$=\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$
$=0.3413+0.4772=0.8185$

4 제품의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30, 5^2)$을 따르므로 불량품으로 판정하여 폐기 처분될 확률은
$\mathrm{P}(X \geq 40)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{X-30}{5} \geq \frac{40-30}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \geq 2)=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$
이때, 공장에서 하루에 10000개의 제품을 생산하므로 폐기 처분되는 불량품의 개수는
$10000 \times 0.0228=228$(개)

5 최고 혈압을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(130, 15^2)$을 따르므로 최고 혈압이 고혈압의 범위에 속할 확률은
$\mathrm{P}(X \geq 160)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{X-130}{15} \geq \frac{160-130}{15}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \geq 2)=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$
따라서 이 지역의 40대 주민 중에서 최고 혈압이 고혈압에 속하는 사람은 2.28 %이다.

실생활 문제 해결하기 / P. 145

1단계 (1) 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(300, 20^2)$을 따른다.
(2) $\frac{242}{1000}=0.242$

2단계 (1) 0.242

(2) $P(X \ge c) = P\left(\frac{X-300}{20} \ge \frac{c-300}{20}\right)$

$= P\left(Z \ge \frac{c-300}{20}\right)$

3단계 (1) $P\left(Z \ge \frac{c-300}{20}\right) = 0.242$

$0.5 - P\left(0 \le Z \le \frac{c-300}{20}\right) = 0.242$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{c-300}{20}\right) = 0.258$

$P(0 \le Z \le 0.7) = 0.258$이므로

$\frac{c-300}{20} = 0.7 \qquad \therefore c = 314$

(2) 314점

실력 키우기 / P. 146

1 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로

$P(X \le 12)$

$= P\left(\frac{X-m}{\sigma} \le \frac{12-m}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z \le \frac{12-m}{\sigma}\right)$

$P(X \ge 26)$

$= P\left(\frac{X-m}{\sigma} \ge \frac{26-m}{\sigma}\right)$

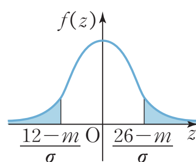
$= P\left(Z \ge \frac{26-m}{\sigma}\right)$

$P(X \le 12) = P(X \ge 26)$이므로

$\frac{12-m}{\sigma} + \frac{26-m}{\sigma} = 0$

$38 - 2m = 0$

$\therefore m = 19$



2 확률변수 X가 정규분포 $N(18, 2^2)$을 따르므로

$P(a \le X \le b)$

$= P\left(\frac{a-18}{2} \le \frac{X-18}{2} \le \frac{b-18}{2}\right)$

$= P\left(\frac{a-18}{2} \le Z \le \frac{b-18}{2}\right)$

$= 0.8185 = 0.3413 + 0.4772$

$= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 2)$

(i) $P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 2)$

$= P(-1 \le Z \le 2)$일 때

$\frac{a-18}{2} = -1, \quad \frac{b-18}{2} = 2$

$\therefore a = 16, \ b = 22$

(ii) $P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 2)$

$= P(-2 \le Z \le 1)$일 때

$\frac{a-18}{2} = -2, \quad \frac{b-18}{2} = 1$

$\therefore a = 14, \ b = 20$

이때, $a > 15$이므로 $\quad a = 16, \ b = 22$

3 등교 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따른다.

(1) $P(12 \le X \le 16)$

$= P\left(\frac{12-20}{4} \le \frac{X-20}{4} \le \frac{16-20}{4}\right)$

$= P(-2 \le Z \le -1) = P(1 \le Z \le 2)$

$= P(0 \le Z \le 2) - P(0 \le Z \le 1)$

$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$

따라서 등교 시간이 12분 이상 16분 이하인 학생은 전체의 13.59 %이다.

(2) $P(X \ge 28)$

$= P\left(\frac{X-20}{4} \ge \frac{28-20}{4}\right)$

$= P(Z \ge 2) = 0.5 - P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

이때, $750 \times 0.0228 = 17.1$이므로 등교 시간이 28분 이상인 학생의 수는 약 17명이다.

4 입사 시험 성적을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(800, 50^2)$을 따른다.

응시자 2000명 중에서 238명이 선발되므로 합격할 확률은

$\frac{238}{2000} = 0.119$

합격자의 최저 점수를 a라고 하면

$P(X \ge a)$

$= P\left(\frac{X-800}{50} \ge \frac{a-800}{50}\right)$

$= P\left(Z \ge \frac{a-800}{50}\right) = 0.119$

$0.5 - P\left(0 \le Z \le \frac{a-800}{50}\right) = 0.119$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{a-800}{50}\right) = 0.381$

$P(0 \le Z \le 1.18) = 0.381$이므로

$\frac{a-800}{50} = 1.18 \qquad \therefore a = 859$

따라서 합격자의 최저 점수는 859점이다.

5 수학 성적을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70, 10^2)$을 따른다.
이때, 상위 63등 이내에 들 확률은
$\frac{63}{1000}=0.063$
상위 63등 이내에 들기 위한 최저 점수를 c라고 하면
$\mathrm{P}(X \geq c)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{X-70}{10} \geq \frac{c-70}{10}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{c-70}{10}\right)=0.063$
$0.5-\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{c-70}{10}\right)=0.063$
$\therefore \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{c-70}{10}\right)=0.437$
$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.53)=0.437$이므로
$\frac{c-70}{10}=1.53 \qquad \therefore c=85.3$
따라서 상위 63등 이내에 들기 위해서는 85.3점 이상을 받아야 한다.

2. 통계적 추정

통계적 추정에 들어가기 전에 / P. 149

1 (1) $-1 \leq x \leq 1$
(2) $-2 \leq x-10 \leq 2$
$\therefore 8 \leq x \leq 12$
(3) $x-1 \leq -3$ 또는 $x-1 \geq 3$
$\therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 4$

2 (1) $\mathrm{P}(X=0)={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$
(2) $\mathrm{P}(X \geq 1)=1-\mathrm{P}(X=0)$
$=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

3 (1) ${}_6\mathrm{P}_6=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1$
$=720$(가지)
(2) ${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=3\times3=9$(가지)

4 (1) $\mathrm{P}(X \geq 70)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{X-70}{5} \geq \frac{70-70}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \geq 0)=0.5$
(2) $\mathrm{P}(X \leq 80)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{X-70}{5} \leq \frac{80-70}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \leq 2)$
$=0.5+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$
$=0.5+0.4772=0.9772$

1. 표본조사와 표본평균의 분포

바탕 다지기 / P. 151

| 스스로 하기 |
1 (1) 농어촌 (2) 농어촌 (3) 100
2 (1) 5, 5, 25 (2) 4, 4, 20 (3) 5, 2, 10

1 $m=60$, $\sigma=6$, $n=9$이므로 표본평균 $\overline{X}$는
$\mathrm{E}(\overline{X})=m=60$
$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6}{3}=2$

기본 익히기 / P. 152

1 $m=(-1)\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{5}{12}=\frac{1}{6}$
$\sigma^2=(-1)^2\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{23}{36}$
표본의 크기 $n=5$이므로 표본평균
$\mathrm{E}(\overline{X})=m=\frac{1}{6}$
$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{23}{36}}{5}=\frac{23}{180}$
$\therefore \mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$
$=\frac{23}{180}+\frac{1}{36}=\frac{7}{45}$

2 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$m=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$
$\sigma^2=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$
이때, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{36}$이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{5}{9}}{n}=\frac{5}{9n}=\frac{5}{36}$$

$\therefore n=4$

3 전구의 수명 시간을 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(2000,\ 200^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(2000,\ 20^2)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(2000\le\overline{X}\le2040)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{2000-2000}{20}\le\frac{\overline{X}-2000}{20}\le\frac{2040-2000}{20}\right)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$

4 2학년 학생의 키 X는 정규분포 $\mathrm{N}(175,\ 10^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(175,\ 2^2)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(177\le\overline{X}\le179)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{177-175}{2}\le\frac{\overline{X}-175}{2}\le\frac{179-175}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(1\le Z\le2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.4772-0.3413=0.1359$

5 모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 12^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(12,\ \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. 이때, $\mathrm{P}(12\le\overline{X}\le15)=0.4332$이므로
$\mathrm{P}(12\le\overline{X}\le15)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{12-12}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\le\frac{\overline{X}-12}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\le\frac{15-12}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)$
$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.4332$
$\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로
$\frac{\sqrt{n}}{4}=1.5$
$\therefore n=36$

실력 키우기 / P. 153

1 빵 하나의 무게를 X라고 하면 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 3^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 1.5^2)$을 따른다. 이때, $S=4\overline{X}$이므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(188\le S\le206)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{188}{4}\le\overline{X}\le\frac{206}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(47\le\overline{X}\le51.5)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{47-50}{1.5}\le\frac{\overline{X}-50}{1.5}\le\frac{51.5-50}{1.5}\right)$
$=\mathrm{P}(-2\le Z\le1)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$
$=0.3413+0.4772=0.8185$

2 샤프심의 길이 X가 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(80,\ \left(\frac{8}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. 이때, $\mathrm{P}(\overline{X}\le84)=0.9938$이므로
$\mathrm{P}(\overline{X}\le84)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-80}{\frac{8}{\sqrt{n}}}\le\frac{84-80}{\frac{8}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$
$=0.9938$
$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.9938$
$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.4938$
$\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)=0.4938$이므로
$\frac{\sqrt{n}}{2}=2.5\qquad\therefore n=25$

3 모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 36^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{36}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.
이때, $\mathrm{P}(|m-\overline{X}|\le8)=0.95$이므로
$\mathrm{P}(|m-\overline{X}|\le8)$
$=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{36}{\sqrt{n}}}\right|\le\frac{8}{\frac{36}{\sqrt{n}}}\right)$
$=\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{2\sqrt{n}}{9}\right)=0.95$
이때, $\mathrm{P}(|Z|\le2)=0.95$이므로
$\frac{2\sqrt{n}}{9}=2\qquad\therefore n=81$

4 모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.
이때, 모평균 50의 2 %는 1이므로 표본평균이 모평

균보다 2 % 이상 크게 나타날 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 51)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-50}{\frac{1}{2}}\ge\frac{51-50}{\frac{1}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

5 이 도시의 가구당 월 소득을 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 10^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 1^2)$을 따른다.
이때, 100가구의 월 소득의 평균과 이 도시의 가구당 월 소득의 평균의 차가 2만 원 이상이 될 확률은

$\mathrm{P}(|\overline{X}-300|\ge 2)$

$=\mathrm{P}(|Z|\ge 2)$

$=2\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\}$

$=2\times(0.5-0.4772)$

$=2\times 0.0228=0.0456$

2. 모평균의 추정

바탕 다지기 / P. 157

| 스스로 하기 |

1 25, 25, 228.55, 241.45

1 신뢰구간의 길이 l은

$l=\overline{X}+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}-\left(\overline{X}-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. 신뢰도를 높이면 k의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이가 길어진다. (참)

ㄴ. 표본평균 $\overline{X}$는 신뢰구간의 길이에 영향을 미치지 않는다. (거짓)

ㄷ. 표본의 크기를 크게 하면 n의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이가 짧아진다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

기본 익히기 / P. 158

1 $n=100$, $\overline{x}=1000$, $\sigma=50$이므로

(1) 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$1000-1.96\frac{50}{\sqrt{100}}\le m\le 1000+1.96\frac{50}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 990.2\le m\le 1009.8$

(2) 모평균 m에 대하여 신뢰도 99%인 신뢰구간은

$$1000-2.58\frac{50}{\sqrt{100}}\le m\le 1000+2.58\frac{50}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 987.1\le m\le 1012.9$

2 $n=100$, $\overline{x}=80$, $\sigma=20$이므로 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$80-1.96\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 80+1.96\frac{20}{\sqrt{100}}$$

$76.08\le m\le 83.92$

$\therefore a=83.92$

3 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$\overline{X}-2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때, $\overline{X}-0.1\sigma\le m\le\overline{X}+0.1\sigma$이므로

$2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.1\sigma$, $\sqrt{n}=20$

$\therefore n=400$

4 $\overline{x}=80$, $\sigma=11$이므로 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$80-2\frac{11}{\sqrt{n}}\le m\le 80+2\frac{11}{\sqrt{n}}$

이때, $78\le m\le 82$이므로

$80-2\frac{11}{\sqrt{n}}=78$, $\sqrt{n}=11$

$\therefore n=121$

실력 키우기 / P. 159

1 모평균을 m, 표본의 크기를 n, 표본평균을 $\overline{X}$라고 하면 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$\overline{X}-1.96\frac{40}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{40}{\sqrt{n}}$

즉, $|\overline{X}-m|\le 1.96\frac{40}{\sqrt{n}}$

이때, 모평균과 표본평균의 차가 4 g 이하이므로

$1.96\frac{40}{\sqrt{n}}\le 4$ $\quad\therefore \sqrt{n}\ge 19.6$

따라서 $n\ge 384.16$이므로 385개 이상 택해야 한다.

2 모평균의 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이 $3.92d$는

$3.92d=2\times 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=d$

따라서 모평균의 신뢰도 99 %인 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.58d$

3 신뢰도 98 %인 모평균 m에 대하여

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.98$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\le \overline{X}-m\le \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.98$$

$$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=0.98$$

$$\mathrm{P}(|Z|\le k)=0.98$$

$$\therefore k=2.33$$

4 모평균을 m, 표본의 크기를 n, 표본평균을 $\overline{X}$라 하고, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$로 놓으면 신뢰도 α %인 신뢰구간은

$$\overline{X}-k\frac{1}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+k\frac{1}{\sqrt{n}}$$

따라서 이 신뢰구간의 길이 l은

$$l=\left(\overline{X}+k\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{X}-k\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2k}{\sqrt{n}}$$

$n=4$일 때 $l=2$이므로

$$2=\frac{2k}{\sqrt{4}},\ k=2 \qquad \therefore l=\frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$l=1\text{일 때}\qquad 1=\frac{4}{\sqrt{n}} \qquad \therefore n=16$$

따라서 필요한 표본의 크기는 16이다.

실생활 문제 해결하기 / P. 161

1단계 (1) 7000

(2) 67000

2단계 $\overline{x}-1.96\frac{14000}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\frac{14000}{\sqrt{n}}$

3단계 $66672\le m\le 67328$

대단원 확인하기 P. 162, 163

1 (1) 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{14}+1\cdot\frac{3}{7}+2\cdot\frac{3}{7}+3\cdot\frac{1}{14}$

$$=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{V}(X)=0\cdot\frac{1}{14}+1^2\cdot\frac{3}{7}+2^2\cdot\frac{3}{7}+3^2\cdot\frac{1}{14}-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=\frac{15}{28}$$

2 (1) $f(x)=ax+1\ (0\le x\le 2)$은 확률밀도함수이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=1$$

$$\int_0^2 (ax+1)dx=1,\ \left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2=2a+2=1$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2}$$

(2) $\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx=\left[-\frac{1}{4}x^2+x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$$

3 $\mathrm{E}(X)=20,\ \mathrm{V}(X)=4$이므로

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-10)=2\mathrm{E}(X)-10$$

$$=2\cdot20-10=30$$

$$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X-10)=2^2\,\mathrm{V}(X)$$

$$=4\cdot4=16$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{16}=4$$

4 연착하는 버스의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{20}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{20-x}$$

(단, $x=0, 1, 2, \cdots, 20$)

따라서 연착하는 버스가 1대 이하일 확률은

$\mathrm{P}(X\le1)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$$={}_{20}\mathrm{C}_0\left(\frac{9}{10}\right)^{20}+{}_{20}\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{19}$$

$=1\times0.1216+20\times0.1\times0.1351$
$=0.3918$

5 예약한 사람이 공연에 참석할 확률은 0.95이다. 따라서 예약한 72명 중에서 공연에 참석한 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(72, 0.95)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X=x)={}_{72}\mathrm{C}_x\cdot0.95^x\cdot0.05^{72-x}$
(단, $x=0, 1, 2, \cdots, 72$)

한편 좌석이 부족한 것은 $X\geq71$의 경우이므로

$\mathrm{P}(X\geq71)$
$=\mathrm{P}(X=71)+\mathrm{P}(X=72)$
$={}_{72}\mathrm{C}_{71}\cdot0.95^{71}\cdot0.05+{}_{72}\mathrm{C}_{72}\cdot0.95^{72}$
$=72\times0.0262\times0.05+1\times0.0249$
$=0.11922$

6 접속 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40, 5^2)$을 따르므로 접속 시간이 50분을 넘을 확률은

$\mathrm{P}(X\geq50)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{X-40}{5}\geq\frac{50-40}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\geq2)=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)$
$=0.5-0.4772$
$=0.0228$

이때, 통신망 이용자 10000명 중에서 접속 시간이 50분을 넘는 사람의 수는

$10000\times0.0228=228$(명)

7 지원자의 점수를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50, 10^2)$을 따른다.
이때, 지원자 100명 중 10등 이내에 들 확률은

$\frac{10}{100}=0.1$

합격자의 최저 점수를 k라고 하면

$\mathrm{P}(X\geq k)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{X-50}{10}\geq\frac{k-50}{10}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-50}{10}\right)=0.1$
$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-50}{10}\right)=0.1$
$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-50}{10}\right)=0.4$

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.28)=0.4$이므로

$\frac{k-50}{10}=1.28 \qquad \therefore k=62.8$

따라서 합격자의 최저 점수는 62.8점이다.

8 $m=20$, $\sigma^2=16$, $n=8$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=20$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{16}{8}=2$

따라서 $\overline{X}^2$의 평균 $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$을 구하면

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$
$=2+20^2=402$

9 전구의 수명 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1400, 100^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(1400, \frac{100^2}{n}\right)$을 따른다.

이때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}\geq1350+\frac{165}{\sqrt{n}}\right)\geq0.90$이므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\geq1350+\frac{165}{\sqrt{n}}\right)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-1400}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\geq\frac{-50+\frac{165}{\sqrt{n}}}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z\geq-\frac{\sqrt{n}}{2}+1.65\right)\geq0.90$
$0.5+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\right)\geq0.90$
$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\right)\geq0.40$

이때, $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.28)=0.4$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\geq1.28$
$\sqrt{n}\geq5.86 \qquad \therefore n\geq34.3396$

따라서 n의 최솟값은 35이다.

10 (1) $n=25$, $\overline{x}=32.2$, $\sigma=0.5$이므로
모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

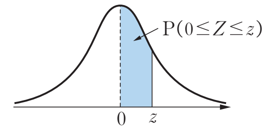
$32.2-1.96\frac{0.5}{\sqrt{25}}\leq m\leq32.2+1.96\frac{0.5}{\sqrt{25}}$
$\therefore 32.004\leq m\leq32.396$

(2) 표본의 크기를 n이라고 하면

$2\times1.96\frac{0.5}{\sqrt{n}}\leq0.2$
$\sqrt{n}\geq9.8 \qquad \therefore n\geq96.04$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 97이다.

표준정규분포표



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997

난수표

41	10	50	81	22	94	80	71	10	68	23	58	20	21	88	71	29	54	42	84
13	49	57	94	72	78	92	78	78	04	17	00	92	85	09	52	78	15	96	97
33	87	89	24	77	65	37	12	38	63	76	49	69	52	36	11	03	58	23	39
15	91	02	97	10	37	14	47	47	79	81	63	34	22	84	89	77	54	40	37
37	94	89	58	24	29	22	39	42	66	95	14	63	40	46	93	99	89	97	80
48	06	32	88	07	06	19	13	11	04	45	95	73	13	19	11	39	24	24	05
92	65	65	69	32	05	63	75	76	57	26	10	31	31	63	77	83	07	31	14
48	66	49	80	78	34	30	47	61	73	44	31	65	38	69	89	46	83	54	40
23	50	07	82	24	34	88	84	90	39	20	46	32	85	66	22	13	24	41	02
47	02	38	86	81	59	77	46	17	55	54	59	00	99	03	16	34	25	39	50
39	65	34	38	46	26	95	15	80	70	40	06	89	76	54	89	61	27	75	66
90	36	99	74	53	71	05	53	69	01	49	59	53	06	18	52	03	18	40	26
46	60	38	92	08	09	16	06	33	02	13	60	78	83	82	17	16	30	55	71
62	67	74	04	84	75	68	64	11	42	22	88	64	73	77	28	54	94	71	69
21	17	44	02	71	21	59	79	73	18	24	74	77	48	02	32	62	21	14	53
26	28	51	07	60	06	70	82	54	15	47	32	68	27	57	25	93	34	46	17
42	52	33	74	19	92	15	67	44	50	18	71	98	10	65	85	25	63	55	29
01	75	61	32	64	82	26	07	52	58	20	62	50	46	31	25	96	08	42	07
40	43	01	08	73	95	03	72	60	57	11	01	09	16	29	01	43	35	12	89
27	45	34	33	89	67	15	09	44	52	97	29	56	42	65	86	53	36	40	06
70	14	67	62	53	35	13	44	94	15	40	73	62	93	59	85	82	75	98	57
08	19	27	74	15	08	70	74	65	24	48	86	89	31	25	93	37	34	82	89
53	49	10	30	07	77	96	85	15	91	44	39	40	04	22	43	98	84	41	37
52	15	45	85	55	73	68	49	91	91	93	09	46	39	60	04	61	98	28	27
47	08	84	16	05	08	28	75	64	30	96	01	45	66	88	19	99	94	90	85



사진 자료 출처

http://www.imageclick.com/

10쪽 얼룩말
10쪽 화산
10쪽 굴뚝
15쪽 끓는 물
25쪽 주차장
32쪽 스키
51쪽 밧줄
163쪽 오케스트라

http://www.topicphoto.com/

8쪽 일식
20쪽 심전도
20쪽 댐
39쪽 제품
44쪽 송전탑
66쪽 수원성
85쪽 아치형 다리

http://image.newsbank.co.kr/

106쪽 안타
123쪽 페널티 킥
126쪽 투표
147쪽 수능
148쪽 철새

http://www.timespace.co.kr/

53쪽 통나무
137쪽 활

http://photo.joins.com/

73쪽 물 로켓

http://www.yonhapnews.co.kr/

88쪽 수영

http://www.kma.go.kr/

20쪽 일기 예보



인용 자료 출처

박을용 외 6인, 「수학대사전」, 한국사전연구사, 1995, **89쪽**
이강섭, 「한국 수학사 학회지, 제19권 제3호 – 목제주령구의 제작 기법 및 수학 교육적 의미」, 한국 수학사 학회, 2006, **125쪽**
KSA3151난수표 **154쪽**
박한식, 「KS 난수표의 작성과 검정」, 상공부표준국,1962, **155쪽**
한국통계학회, 「알고보면 재미있는 통계 이야기」, 자유아카데미, 1991, **160쪽**
http://www.dailian.co.kr/ 161쪽

지 은 이 약 력

이강섭

서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
서울대학교 대학원 계산통계학과 졸업(이학 박사)
제6차, 제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
단국대학교 기획실장, 사범대학 학장
(현) 단국대학교 사범대학 수학교육과 교수
한국수학교육학회 회장
(현) 한국수학교육학회 명예 회장

왕규채

서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
단국대학교 교육대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
신월중, 영등포여고, 구일고, 구정고, 석관고, 성동고 교사
(현) 서울과학고등학교 교사

송교식

서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
서울대학교 사범대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
선린중, 석관고, 청담고, 한성과학고 교사
(현) 용산고등학교 교사

양인웅

성균관대학교 사범대학 수학교육과 졸업
성균관대학교 교육대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
경동고, 잠실고, 수락고 교사
(현) 경복고등학교 교사

표지 출처
김상구 / Kim Sang-ku / No. 848 / 45.5×60.5 cm / 2003

단원별 집필
총괄 진행 이강섭
Ⅰ **함수의 극한과 연속** 왕규채
Ⅱ **다항함수의 미분법** 양인웅
Ⅲ **다항함수의 적분법** 송교식
Ⅳ **확률** 이강섭
Ⅴ **통계** 이강섭

편집 김영호, 한란, 한혜현, 이원길, 김화신, 김지석
디자인 김태원, 박현신, 김의수
삽화 서영철, 송회석, 양승용, 토리 디자인
사진 이석원
컷 이미영, 이도훈, 김윤아

교육과학기술부의 위탁을 받아 **한국교육과정평가원**이 검정 심사를 하였음.

고등학교 미적분과 통계 기본 익힘책

2009. 8. 10. 전시본 인쇄 비 매 품
2009. 8. 17. 전시본 발행

지은이 이강섭 외 3인
발행인 (주)지학사 서울시 마포구 동교동 180-20
인쇄인

교과서에 대한 문의사항이나 의견이 있으신 분은 교육과학기술부〈교육과정 · 교과서정보서비스(http://cutis.mest.go.kr)〉를 이용하여 주시기 바랍니다.

내용관련문의 (주)지학사 수학부 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
개별구입문의 사단법인 한국검정교과서(www.ktbook.com) 고객지원팀 02-3663-5409~12